1 Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x+2}-\sqrt{x^2+x+3}$.

Corrigé : Pour $x \geq 0$, les expressions sous les racines carrées sont définies et en utilisant la méthode de la quantité conjuguée, il vient :

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+2x+2}-\sqrt{x^2+x+3} &= \frac{(x^2+2x+2)-(x^2+x+3)}{\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2+x+3}} \\ &= \frac{x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2+x+3}} \\ &= \frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}}\end{aligned}$$

La dernière expression n'est plus une forme indéterminée, on obtient :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x+2}-\sqrt{x^2+x+3}=\frac{1}{2}}$$

2 ★ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application telle que :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)(1-f(x)) = \frac{1}{4}$$

Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$.

Corrigé : Pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\left(f(x)-\frac{1}{2}\right)^2 = f(x)^2 - f(x) + \frac{1}{4} = -f(x)(1-f(x)) + \frac{1}{4}$$

En passant à la limite dans la dernière expression, on voit que :

$$\lim_{x\to+\infty} \left(f(x)-\frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

En composant par la fonction racine carrée, nous obtenons : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - \dfrac{1}{2} = 0$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}}$$

3 Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x - E(x)$ n'a pas de limite, ni finie, ni infinie en $+\infty$.

Corrigé : Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit deux suites :

$$u_n = n \text{ et } v_n = n + \frac{1}{2}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$f(u_n) = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ et } f(v_n) = \frac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

D'après le théorème de caractérisation séquentielle de la limite, on en déduit que f n'a pas de limite en $+\infty$.

$$\boxed{f \text{ n'a pas de limite en } +\infty}$$

4 Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-E(x)}{x+E(x)}$.

Corrigé : On va utiliser le théorème d'encadrement, pour $x \geq 1$, on a :

$$0 \leq x - E(x) < 1 \text{ et } x \leq x + E(x)$$

On en déduit que pour tout $x \geq 1$:

$$0 \leq \frac{x-E(x)}{x+E(x)} \leq \frac{1}{x}$$

Étant donné que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, d'après le théorème d'encadrement, on en déduit que :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{x-E(x)}{x+E(x)} = 0}$$

5 ★ Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)^2 = x^2 + 1$$

Corrigé : • **Analyse.** Soit f une fonction qui vérifie la relation, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(x) = -\sqrt{x^2+1} \text{ ou } f(x) = \sqrt{x^2+1}$$

On va démontrer que l'on est tout le temps dans le premier cas ou tout le temps dans le second cas. Par l'absurde, s'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(a) = -\sqrt{a^2+1}$ et $f(b) = \sqrt{b^2+1}$. On a $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ et f continue sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) = 0$. C'est contradictoire car f ne prend pas la valeur 0. On en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -\sqrt{x^2+1} \text{ ou } \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x^2+1}$$

• **Synthèse.** On vérifie que les deux applications définies ci-dessus conviennent.

$$\boxed{\text{Il y a deux applications qui conviennent : } \begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & -\sqrt{x^2+1} \end{array} \text{ ou } \begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \sqrt{x^2+1} \end{array}}$$

6 ★ Montrer que l'application suivante est majorée :

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{1}{(x-1)^{10}+(x-2)^{12}} \end{array}$$

Corrigé : Remarquons déjà que la fonction f est correctement définie sur $\mathbb{R}$ car pour que le dénominateur s'annule, il faudrait que x soit égal à 0 et à 1 en même temps. On va majorer la fonction f sur différents intervalles afin de pouvoir conclure :

• Pour $x \in [2, +\infty[$, on a $x - 1 \geq 1$ et $x - 2 \geq 0$ d'où :

$$f(x) \leq \frac{1}{1^{10}+0^{12}} = 1$$

• Pour $x \in]-\infty, 1]$, on a : $1 - x \geq 0$ et $2 - x \geq 1$ d'où :

$$f(x) \leq \frac{1}{0^{10}+1^{12}} = 1$$

- Sur le segment $[1,2]$, la fonction est continue donc f est bornée. En particulier, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in [1,2],\ f(x) \leq M$$

Finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq \max(1, C)$$

$$\boxed{f \text{ est majorée sur } \mathbb{R}}$$

7 ★ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$ telle que $f_{\mid\mathbb{Q}}$ soit croissante. Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Corrigé : Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x < y$, il s'agit de démontrer que $f(x) \leq f(y)$. On sait qu'il existe une suite de rationnels (x_n) qui tend vers x et une suite de rationnels y_n qui tend vers y. En appliquant la définition de la limite avec $\varepsilon = \dfrac{y-x}{2} > 0$, on a :

$$\exists n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_1,\ |x_n - x| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_1,\ -\varepsilon + x \leq x_n \leq \varepsilon + x \Leftrightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_1,\ \frac{3x-y}{2} \leq \underline{x_n \leq \frac{y+x}{2}}$$

$$\exists n_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_2,\ |y_n - y| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \exists n_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_2,\ -\varepsilon + y \leq y_n \leq \varepsilon + y \Leftrightarrow \exists n_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_2,\ \underline{\frac{x+y}{2} \leq y_n} \leq \frac{3y-x}{2}$$

On en déduit que pour tout $n \geq \max(n_1, n_2)$, on a : $x_n \leq y_n$ et la fonction f étant croissante sur $\mathbb{Q}$, cela donne $f(x_n) \leq f(y_n)$. On peut passer à la limite grâce à la continuité de f pour obtenir : $f(x) \leq f(y)$.

$$\boxed{f \text{ est croissante sur } \mathbb{Q}}$$

8 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$ s'annulant en tout point de $\mathbb{Q}$. Montrer que $f = 0$.

Corrigé : La fonction nulle et la fonction f sont continues et coïncident sur $\mathbb{Q}$. D'après le corollaire du théorème de caractérisation séquentielle de la continuité, on en déduit que f est nulle sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{f = 0}$$

9 ♡★ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$. On suppose que f n'a pas de point fixe. Démontrer que $f \circ f$ n'a pas de point fixe.

Corrigé : On considère l'application g définie sur $\mathbb{R}$ par $g : x \mapsto f(x) - x$. Par hypothèse, la fonction g est continue comme somme de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et elle ne s'annule pas car f n'a pas de point fixe. Une fonction continue sur $\mathbb{R}$ qui ne s'annule pas garde un signe constant, ce qui donne deux cas.

- Si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) > 0$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > x$. En appliquant cela à $f(x)$, on obtient :

$$f(f(x)) > f(x) > x$$

Ce qui démontre que $f \circ f$ n'a pas de point fixe dans ce cas.

- Si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) < 0$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) < x$. En appliquant cela à $f(x)$, on obtient :

$$f(f(x)) < f(x) < x$$

Ce qui démontre que $f \circ f$ n'a pas de point fixe.

$$\boxed{f \circ f \text{ n'a pas de point fixe}}$$

$\boxed{10}$ ♡★★ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et 1-périodique. Montrer que :

$$\forall a \in]0, +\infty[,\ \exists c \in \mathbb{R},\ f(c+a) = f(c)$$

Corrigé : Soit $a \in]0, +\infty[$ fixé. On est amené à poser :

$$g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x+a) - f(x) \end{array}$$

Il s'agit de démontrer que g s'annule. La fonction f est continue sur le segment $[0,1]$ donc elle est bornée et atteint ses bornes. Il existe $(x_1, x_2) \in [0,1]^2$ tels que :

$$f(x_1) = \max_{x \in [0,1]}(f(x)) \text{ et } f(x_2) = \min_{x \in [0,1]}(f(x))$$

Il s'agit en fait d'un maximum et d'un minimum sur $\mathbb{R}$ car f est 1-périodique. Ainsi par définition de x_1 et de x_2, on a :

$$g(x_1) = f(x_1 + a) - f(x_1) \geq 0 \text{ et } g(x_2) = f(x_2 + a) - f(x_2) \leq 0$$

La fonction g étant continue sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit qu'elle s'annule :

$$\exists c \in \mathbb{R},\ g(c) = 0 \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R},\ f(c+a) = f(c)$$

$$\boxed{\forall a \in]0, +\infty[,\ \exists c \in \mathbb{R},\ f(c+a) = f(c)}$$

$\boxed{11}$ ♡★ Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues en 0 telles $f(0) = 0$ et :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f\left(\frac{x+y}{3}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

Corrigé : • **Analyse.** Soit f une fonction vérifiant la propriété de l'énoncé. Fixons $x \in \mathbb{R}$, en prenant $x = y$, il vient :

$$f\left(\frac{2}{3}x\right) = f(x)$$

Par une récurrence immédiate, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n x\right) = f(x)$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n x = 0$ donc par continuité de f en 0, on obtient $\lim\limits_{n \to +\infty} f\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n x\right) = f(0) = 0$. Cependant cette limite vaut aussi $f(x)$. On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$, c'est-à-dire que f est nulle.

• **Synthèse.** La fonctions nulle vérifie les conditions de l'énoncé.

$$\boxed{\text{Seule la fonction nulle convient}}$$

$\boxed{12}$ ★ Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$. On suppose que :

$$\max_{x \in [a,b]}(f(x)) = \max_{x \in [a,b]}(g(x))$$

Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = g(c)$.

Corrigé : Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes ce qui justifie l'existence du maximum de f et du maximum de g, notons ce maximum commun $M \in \mathbb{R}$. Il existe $(x_1, x_2) \in [a,b]^2$ tels que $f(x_1) = M$ et $g(x_2) = M$. On a :

$$(f-g)(x_1) = f(x_1) - g(x_1) = M - g(x_1) \geq 0$$

$$(f-g)(x_2) = f(x_2) - g(x_2) = f(x_2) - M \leq 0$$

De plus, la fonction $f - g$ est continue sur $[a,b]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que $f - g$ s'annule : $\exists c \in [a,b],\ f(c) - g(c) = 0$.

$$\boxed{\exists c \in [a,b],\ f(c) = g(c)}$$

$\boxed{13}$ ★★ Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ telles que :

$$\forall x \in [a,b],\ f(x) < g(x)$$

Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$\forall x \in [a,b],\ f(x) + c \leq g(x)$$

Ce résultat reste-il vrai si on remplace $[a,b]$ par $]0, +\infty[$?

Corrigé : • La fonction $g - f$ est continue et strictement positive sur $[a,b]$ donc elle est bornée et atteint ses bornes en particulier elle atteint son minimum :

$$\exists x_0 \in [a,b],\ \forall x \in [a,b],\ (g-f)(x) - (g-f)(x_0) \geq 0$$

Notons $c = g(x_0) - f(x_0) > 0$. On a alors :

$$\forall x \in [a,b],\ g(x) - f(x) \geq c \Leftrightarrow \forall x \in [a,b],\ g(x) \geq f(x) + c$$

Ce qui est la relation voulue.

• Le résultat est faux sur l'intervalle $[0, +\infty[$. On peut donner un contre-exemple en prenant $g : x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$ et f l'application nulle. On a bien :

$$\forall x \in [0, +\infty[,\ g(x) > f(x)$$

Par l'absurde, on suppose qu'il existe $c > 0$ tel que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $f(x) + c \leq g(x)$. En passant à la limite quand x tend vers $+\infty$, il vient $c \leq 0$, ce qui est absurde.

$\boxed{14}$ ★ Déterminer les limites suivantes, si elles existent, et démontrer qu'elles n'existent pas le cas échéant.

1. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (x - \ln(x + \sqrt{x^2+1}))$
2. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$
3. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \cos(x) \cos\left(\frac{1}{x}\right)$
4. $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^{\frac{1}{n}} - 1}{x^{\frac{1}{m}} - 1}$ où $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$
5. $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{\sqrt{2x+7} - 3}$

Corrigé :

1. On met le terme prépondérant en facteur, pour $x > 0$:

$$x - \ln(x + \sqrt{x^2+1}) = x\left(1 - \frac{\ln(x) + \ln\left(1 + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}{x}\right)$$

   Cette quantité tend vers 0 d'après les résultats usuels de croissances comparées.

2. Pour $x > 0$, en reconnaissant un taux de variation, on a :

$$x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) = \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x} - 0} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

3. On considère deux suites qui tendent vers 0 :

$$x_n = \frac{1}{2n\pi} \text{ et } y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$$

   On a :

$$f(x_n) = \cos\left(\frac{1}{2n\pi}\right)\cos(2n\pi) = \cos\left(\frac{1}{2n\pi}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \cos(0) = 1$$

$$f(y_n) = \cos\left(\frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}\right)\cos\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

   Ce qui démontre que f n'a pas de limite en 0.

4. On transforme l'expression pour reconnaitre un taux de variation :

$$\frac{x^{\frac{1}{n}} - 1}{x^{\frac{1}{m}} - 1} = \frac{x^{\frac{1}{n}} - 1}{x - 1} \times \frac{x - 1}{x^{\frac{1}{m}} - 1} \underset{x\to 1}{\longrightarrow} \frac{1}{n} \times \frac{1}{\frac{1}{m}} = \frac{m}{n}$$

   Ceci en reconnaissant le taux de variation en 1 de la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ qui a pour dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$.

5. On multiplie par les quantités conjuguées :

$$\frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)(\sqrt{2x+7}+3)}{(\sqrt{2x+7}-3)\sqrt{2x+7}+3)(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{(x-1)\sqrt{2x+7}+3}{(2x-2)\sqrt{x+3}+2} = \frac{\sqrt{2x+7}+3}{2(\sqrt{x+3}+2)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{4}$$

15 Étudier la continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} xe^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x\ln(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Corrigé : La fonction f est clairement continue sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$, il reste à étudier la continuité en 0. Pour cela étudions la continuité à gauche et à droite en 0 :

$$\lim_{x\to 0^-} xe^{\frac{1}{x}} = 0 = f(0)$$

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0 = f(0)$$

$$\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$$

16 Étudier la continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto x + 2E(x) + 2\sqrt{x - E(x)}$$

Corrigé : La fonction f est continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ comme somme de fonctions l'étant. Soit $k \in \mathbb{Z}$, étudions la continuité en k. On a :

$$\lim_{x \to k^-} f(x) = k + 2(k-1) + 2\sqrt{k-(k-1)} = 3k = f(k)$$

$$\lim_{x \to k^+} f(x) = k + 2k + 2\sqrt{k-k} = 3k = f(k)$$

On en déduit que :

$$\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$$

17 ♡★★★ Étudier la continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Corrigé : Soit $A = \left\{\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi,\ -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$. On va démontrer que f est continue uniquement en tout point de A.

• Soit $x_0 \in A$. On a $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ donc $f(x_0) = \dfrac{1}{2}$. On va utiliser la caractérisation séquentielle de la continuité. Soit (u_n) une suite de réels qui tend vers x_0. Si $u_n \in \mathbb{Q}$, $f(u_n) = \cos(u_n)$ et si $u_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ alors $f(u_n) = \dfrac{1}{2}$. Ce qui nous donne $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = \dfrac{1}{2} = f(x_0)$. On en déduit que f est continue en x_0.

• Soit $x_0 \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \setminus A$, on a $f(x_0) = \dfrac{1}{2} \neq \cos(x_0)$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe une suite de rationnels (u_n) qui tend vers x_0, on a alors :

$$f(u_n) = \cos(u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \cos(x_0) \neq \frac{1}{2} = f(x_0)$$

La fonction f n'est pas continue en x_0.

• Soit $x_0 \in \mathbb{Q}$, on a $f(x_0) = \cos(x_0) \neq \dfrac{1}{2}$. Par densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe une suite (u_n) d'irrationnels qui tend vers x_0, on a alors :

$$f(u_n) = \frac{1}{2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \neq f(x_0)$$

Ainsi par caractérisation séquentielle de la continuité, on en déduit que f n'est pas continue en x_0.

$$\boxed{f \text{ est continue sur } A}$$

18 ♡★★ Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue. On suppose qu'il existe $l \in [0, 1[$ tel que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = l$. Montrer que f possède un point fixe.

Corrigé : On pose $g : x \mapsto f(x) - x$ définie sur $\mathbb{R}_+$. La fonction g est continue comme somme de deux fonctions continues. On doit montrer que g s'annule, pour cela montrons qu'elle change de signe. On a :

$$g(0) = f(0) - 0 \geq 0$$

D'autre part :

$$\frac{g(x)}{x} = \frac{f(x)}{x} - 1 \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} l - 1 < 0 \text{ car } l \in [0, 1[$$

Il en résulte qu'il existe $A \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $x \geq A$, on a $\dfrac{g(x)}{x} < 0$ donc $g(x) < 0$.

Finalement g est continue sur $\mathbb{R}_+$ et change de signe donc g s'annule et par suite f a un point fixe.

$$\boxed{f \text{ a un point fixe}}$$

19 ★★★ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x) - f(y)| \geq |x - y|$$

1. Montrer que f est strictement monotone sur $\mathbb{R}$.
2. Prouver que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
3. Soit $F = \{x \in \mathbb{R},\ f(x) = x\}$. Montrer que F est un intervalle de $\mathbb{R}$.
4. On suppose que f croit et qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f([a, b]) \subset [a, b]$. Montrer que $[a, b] \subset F$.
5. On suppose que F décroit, démontrer que F est réduit à un point.

Corrigé :

1. La fonction f étant continue, il suffit de démontrer qu'elle est injective afin de pouvoir conclure à la stricte monotonie. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tels que $f(x) = f(y)$. D'après l'hypothèse, cela donne $0 \geq |x - y|$ donc $x = y$, d'où l'injectivité.
2. On suppose que f est strictement croissante :
   - si $x > 0$, d'après l'hypothèse, on a : $f(x) - f(0) \geq x - 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
   - si $x < 0$, on a : $f(0) - f(x) \leq 0 - x$ donc $f(x) \leq f(0) + x$ d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

   La fonction f est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. D'après le théorème de la bijection f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

   Si f est strictement décroissante, on applique le raisonnement précédent à $-f$ qui est strictement croissante et qui vérifie toujours l'hypothèse de l'énoncé.
3. Afin de démontrer que F est un intervalle, nous allons démontrer que F est une partie convexe de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que l'on considère $(a, b) \in F^2$ et $x \in [a, b]$ et nous devons démontrer que $x \in F$. Par hypothèse, on a $f(a) = a$ et $f(b) = b$. D'après la question 1., la fonction f est soit croissante, soit décroissante.
   - si f est croissante, on a :
   $$f(x) - f(a) \geq x - a \Longrightarrow f(x) - x \geq f(a) - a = 0$$
   $$f(b) - f(x) \geq b - x \Longrightarrow f(x) - x \leq f(b) - b = 0$$

   On en déduit que $f(x) = x$.
   - si f est décroissante, on a :
   $$f(a) - f(x) \geq x - a \Longrightarrow f(x) - x \geq f(a) - a = 0$$
   $$f(x) - f(b) \geq b - x \Longrightarrow f(x) - x \leq f(b) - b = 0$$

   Là aussi, on a $f(x) = x$. On a démontré dans les deux cas que $x \in [a, b]$, on en déduit que F est un intervalle.
4. Par continuité et par croissance de f, on a $f([a, b]) = [f(a), f(b)] \subset [a, b]$ d'où $0 \leq f(b) - f(a) \leq b - a$. D'autre part, par hypothèse $f(b) - f(a) \geq b - a$. On en déduit que $f(a) - a = f(b) - b = 0$ donc $(a, b) \in F^2$. Comme F est un intervalle, on a $[a, b] \subset F$.
5. La fonction $x \mapsto f(x) - x$ est continue sur $\mathbb{R}$, on a :
   - si $x < 0$, $f(x) - x \geq f(0) - x \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} +\infty$
   - si $x > 0$, $f(x) - x \leq f(0) - x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$

   On en déduit que $x \mapsto f(x) - x$ change de signe et par continuité elle s'annule. Ainsi F est non vide. Il reste à démontrer que F est réduit à un point. Soient $(a, b) \in F^2$ avec par exemple $a < b$, on a $f(a) > f(b)$, c'est-à-dire $a > b$, ce qui est absurde.

$\boxed{20}$ ★ Déterminer toutes les valeurs de a_n et b_n pour lesquelles la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suivante est continue :

$$f(x) = \begin{cases} a_n + \sin(\pi x) & \text{si } x \in [2n, 2n+1],\ n \in \mathbb{Z} \\ b_n + \cos(\pi x) & \text{si } x \in]2n-1, 2n[,\ n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Corrigé : Déjà f est clairement continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$, il faut et il suffit que :

$$\lim_{x \to 2n^-} f(x) = \lim_{x \to 2n^+} f(x) = f(2n) \text{ et } \lim_{x \to (2n-1)^-} f(x) = \lim_{x \to (2n-1)^+} f(x) = f(2n-1)$$

Ce qui se traduit par :

$$b_n + 1 = a_n \text{ et } a_{n-1} = b_n - 1$$

En sommant les deux inégalités, on obtient $a_{n-1} + 2 = a_n$, la suite (a_n) est arithmétique et on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 2n + a_0$ où $a_0 \in \mathbb{R}$. On en déduit que $b_n = 2n - 1 + a_0$.

$\boxed{21}$ ★★ Soient f et g deux fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$ telles que $f \circ g = g \circ f$. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(f(a)) = g(g(a))$. Montrer qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f(b) = g(b)$.

Corrigé : On raisonne par contraposition en supposant que l'équation $f(x) = g(x)$ n'a pas de solution, c'est-à-dire que $h = f - g$ ne s'annule pas. Comme h est continue et ne s'annule pas, elle garde un signe constant, en particulier pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$h(f(x)) + h(g(x)) \neq 0$$

Or :

$$h(f(x)) + h(g(x)) = f(f(x)) - g(f(x)) + f(g(x)) - g(g(x)) = f(f(x)) - g(g(x))$$

On en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(f(x)) - g(g(x)) \neq 0$$

Ce qui démontre le résultat voulu par contraposition.

$$\boxed{\text{L'équation } f(x) = g(x) \text{ a une solution}}$$

$\boxed{22}$ ★ Soit f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(f(x)) = -x$$

Montrer que f n'est pas continue.

Corrigé : On raisonne par l'absurde en supposant que f est continue sur $\mathbb{R}$. L'application f est injective car si l'on suppose que $f(a) = f(b)$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ alors en composant par f, on a $f(f(a)) = f(f(b))$, c'est-à-dire $-a = -b$ d'où $a = b$. La fonction f est continue et injective, on en déduit qu'elle est strictement monotone sur $\mathbb{R}$.

Quelque soit le sens de variation de f, on a $f \circ f$ qui est strictement croissante, c'est absurde car $f \circ f = -\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

$$\boxed{f \text{ n'est pas continue sur } \mathbb{R}}$$

$\boxed{23}$ ★★ Soient a, b et f trois fonctions continues sur $\mathbb{R}$ avec $a < b$. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a(x)$ ou $f(x) = b(x)$. Montrer que $f = a$ ou $f = b$.

Corrigé : Il y a plusieurs méthodes mais le plus rapide est de poser :

$$h : x \mapsto \frac{f(x) - a(x)}{b(x) - a(x)}$$

La fonction h est bien définie sur $\mathbb{R}$ car $a < b$ et elle est continue car a, b et f le sont. Par hypothèse h prend comme seules valeurs 0 et 1. Ainsi car continuité, h est constante égale à 0 ou constante égale à 1. Ce qui donne bien $f = a$ ou $f = b$.