Colle 8 : ensembles-applications

1 Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E, démontrer que :

$$(A \cup B \subset A \cup C \text{ et } A \cap B \subset A \cap C) \Rightarrow B \subset C$$

Corrigé : On suppose que $A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cup C$, démontrons que $B \subset C$. Soit $x \in B$, alors $x \in A \cup B$. Or $A \cup B = A \cup C$ donc $x \in A \cup C$ ce qui nous donne deux cas à considérer :

• si $x \in C$ la preuve est terminée.

• si $x \in A$ alors $x \in A \cap B$, or $A \cap B \subset A \cap C$ donc $x \in C$.

Dans les deux cas, $x \in C$ ce qui démontre que $B \subset C$.

$$\boxed{(A \cup B \subset A \cup C \text{ et } A \cap B \subset A \cup C) \Rightarrow B \subset C}$$

2 ★★ Soient E et F deux ensembles, A_1, A_2 des parties de E et B_1, B_2 des parties de F.
a) Montrer que $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$.
b) Montrer que $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_1) = (A_1 \cup A_2) \times B_1$.

Corrigé : a) On va raisonner directement par équivalence, soit $(x, y) \in E \times F$, on a :

$$\begin{array}{rcl} (x,y) \in (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) & \Leftrightarrow & (x,y) \in (A_1 \times B_1) \text{ et } (x,y) \in (A_2 \times B_2) \\ & \Leftrightarrow & (x \in A_1 \text{ et } y \in B_1) \text{ et } (x \in A_2 \text{ et } y \in B_2) \\ & \Leftrightarrow & (x \in A_1 \cap A_2) \text{ et } (y \in B_1 \cap B_2) \\ & \Leftrightarrow & (x,y) \in (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2) \end{array}$$

Ce qui démontre que $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$.

b) On utilise la même méthode. Soit $(x, y) \in (A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_1)$:

$$\begin{array}{rcl} (x,y) \in (A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_1) & \Leftrightarrow & (x,y) \in (A_1 \times B_1) \text{ ou } (x,y) \in (A_2 \times B_1) \\ & \Leftrightarrow & (x \in A_1 \text{ et } y \in B_1) \text{ ou } (x \in A_2 \text{ et } y \in B_1) \\ & \Leftrightarrow & x \in A_1 \cup A_2 \text{ et } y \in B_1 \\ & \Leftrightarrow & (x,y) \in (A_1 \cup A_2) \times B_1 \end{array}$$

Ce qui démontre que $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_1) = (A_1 \cup A_2) \times B_1$.

3 ★★ Soient A et B deux parties de E. Résoudre l'équation $A \cap X = B$ d'inconnue X une partie de E.

Corrigé : On procède comme dans l'exercice similaire que l'on a vu en TD.

• **Analyse.** Soit X une partie de E telle que $A \cap X = B$. On a nécessairement $B \subset A$. Ce qui nous permet de dire que si B n'est pas inclus dans A alors l'équation n'a pas de solution.

D'autre part, on doit également avoir $B \subset X$. Remarquons également que $X \cap (A \setminus B) = \emptyset$, en effet si $x \in X$ et $x \in A$ alors on devrait avoir $X \in B$.

Finalement $X = B \cup Y$ où Y est une partie quelconque du complémentaire de A.

• **Synthèse.** On suppose que $B \subset A$. Soit $X = B \cup Y$ où Y est une partie du complémentaire de X, démontrons que X vérifie l'équation proposée. On a :

$$A \cap X = A \cap (B \cup Y) = (A \cap B) \cup (A \cap Y) = A \cap B = B$$

Ceci en utilisant le fait que $A \cap Y = \emptyset$ puisque Y est inclus dans le complémentaire de A et $A \cap B = B$ car $B \subset A$.

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{l} \emptyset \text{ si } B \text{ n'est pas inclus dans } A \\ \{B \cup Y,\ Y \in \mathcal{P}(\overline{A})\} \text{ si } B \subset A \end{array} \right.}$$

4 ★★ Soient E, F et G trois ensembles, $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to E$ trois applications.
On suppose que $h \circ g \circ f$ et $g \circ f \circ h$ sont injectives et que $f \circ h \circ g$ est surjective, démontrer que f, g et h sont bijectives.

Corrigé : Dans tout l'exercice, nous allons utiliser le résultat de l'exercice vu en TD :

- $g \circ f$ injective $\Rightarrow$ f injective
- $g \circ f$ surjective $\Rightarrow$ g surjective

En utilisant la remarque préliminaire, on sait que $h \circ g \circ f$ et $g \circ f \circ h$ injectives implique que f, h, $g \circ f$ et $f \circ h$ sont injectives. D'autre part, $f \circ h \circ g$ surjective implique que f et $f \circ h$ sont surjectives.

- On en déduit directement que f est bijective, c'est-à-dire que f^{-1} a un sens.
- On obtient alors : $h = f^{-1} \circ (f \circ h)$ qui est surjective comme composée de surjections, h étant aussi injective, on en déduit que h est bijective et h^{-1} a un sens.
- Enfin $g = h^{-1} \circ f^{-1} \circ (f \circ h \circ g)$ est surjective comme composée de surjections et $g = (g \circ f \circ h) \circ h^{-1} \circ f^{-1}$ est injective comme composée d'injections. Finalement g est également bijective.

$$\boxed{f,\ g \text{ et } h \text{ sont bijectives}}$$

5 ★★★ Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

1. Démontrer que f est injective si et seulement si pour tout ensemble A et pour toutes applications $g : A \to E$ et $h : A \to E$, on a :
$$f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$$
2. Démontrer que f est surjective si et seulement si pour tout ensemble B et pour toutes applications $g : F \to B$ et $h : F \to B$, on a :
$$g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$$

Corrigé :

1. ($\Rightarrow$) On suppose que f est injective, donnons-nous g et h deux applications de A dans E où A est un ensemble quelconque. On suppose que $f \circ g = f \circ h$, c'est-à-dire que pour tout $x \in A$, on a : $f(g(x)) = f(h(x))$. Par injectivité de f, on en déduit que $g(x) = h(x)$, finalement $g = h$.

   ($\Leftarrow$) On suppose que pour tout ensemble A et pour toutes applications $g : A \to E$ et $h : A \to E$, on a :
$$f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$$
   démontrons que f est injective. Soient $(x, x') \in E^2$ tels que $f(x) = f(x')$. Pour appliquer l'hypothèse, nous allons choisir un ensemble à un élément $A = \{a\}$. On note g l'application définie de A dans E par $g(a) = x$ et h l'application de A dans E définie par $h(a) = x'$. On a bien $f \circ g = f \circ h$ puisque $f(g(a)) = f(x) = f(x') = f(h(a))$ ceci implique que $g(a) = h(a)$ d'où $x = x'$ et par suite f est injective.
2. ($\Rightarrow$) On suppose que f est surjective, donnons-nous g et h deux applications de F dans B où B est un ensemble quelconque. On suppose que $g \circ f = h \circ f$. Soit $y \in F$, démontrons que $g(y) = h(y)$, on aura ainsi $g = h$. L'application f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Par hypothèse, on a : $g(f(x)) = h(f(x))$, c'est-à-dire : $g(y) = h(y)$.

   ($\Leftarrow$) On suppose que pour tout ensemble B et pour toutes applications $g : F \to B$ et $h : F \to B$, on a :
$$g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$$
   démontrons que f est surjective. Par l'absurde, on suppose que f n'est pas surjective, c'est-à-dire qu'il existe $y_0 \in F$ qui n'a pas d'antécédent par f. On considère $B = \{p, p'\}$ un ensemble a deux éléments. On considère l'application g définie de F dans B et constante égale à p et h définie de F dans B constante égale à p sur $F \setminus \{y_0\}$ et telle que $h(y_0) = p'$. On a bien $g \circ f = h \circ f$ puisque f ne prend jamais la valeur y_0 sur laquelle diffère g et h. Par hypothèse, on en déduit que $g = h$ ce qui est contradictoire par définition de g et h. On en déduit que f est surjective.

$\boxed{6}$ ★ On considère l'application :

$$f \quad : \quad \begin{array}{ccc} [1+\infty[& \to & [-2+\infty[\\ x & \mapsto & x^2-2x-1 \end{array}$$

Démontrer que f est correctement définie puis que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Corrigé : • On considère la fonction :

$$g \quad : \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2-2x-1 \end{array}$$

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $g'(x) = 2(x-1)$. On en déduit que la fonction g est strictement croissante sur $[1+\infty[$, de plus $g(1) = -2$ ce qui fait que l'application f est bien définie.

• Soit $y \in [-2, +\infty[$ et $x \in [1, +\infty[$. On a :

$$\begin{array}{rcl} y = f(x) & \Leftrightarrow & y = x^2 - 2x - 1 \\ & \Leftrightarrow & x^2 - 2x - 1 - y = 0 \end{array}$$

Le discriminant de cette équation de degré 2 est $\Delta = 4 - 4(-1-y) = 8 + 4y$. Ce discriminant est positif car $y \geq -2$, ce qui nous donne deux solutions :

$$x_1 = \frac{2+\sqrt{8+4y}}{2} \text{ et } x_1 = \frac{2-\sqrt{8+4y}}{2}$$

Or $x \geq 1$, ainsi seule la solution x_1 convient. On a :

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = \frac{2+\sqrt{8+4y}}{2} = 1 + \sqrt{2+y}$$

On a démontré que tout $y \in [-2, +\infty[$ a un unique antécédent par f dans $[1, +\infty[$, ainsi f est bijective et :

$$f^{-1} \quad : \quad \begin{array}{ccc} [-2, +\infty[& \to & [1, +\infty[\\ y & \mapsto & 1+\sqrt{2+y} \end{array}$$

$\boxed{7}$ ★ On note $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$. Montrer que D ne peut pas s'écrire comme le produit cartésien de deux parties de $\mathbb{R}$.

Corrigé : Par l'absurde, on considère A et B deux parties de $\mathbb{R}$ telles que $D = A \times B$. On a $(1, 0) \in D$ car $1^2 + 0^2 \leq 1$ donc $(1, 0) \in A \times B$, c'est-à-dire $1 \in A$ et $0 \in B$. De même $(0, 1) \in D$ donc $0 \in A$ et $1 \in B$. Finalement, on a $1 \in A$ et $1 \in B$ donc $(1, 1) \in A \times B$: c'est absurde car $1^2 + 1^2 > 1$.

$$\boxed{D \text{ ne s'écrit pas comme un produit cartésien}}$$

$\boxed{8}$ ★ Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E. Montrer que :

$$(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) = (A \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{A}) \Rightarrow B = C$$

Corrigé : On procède par double inclusion. Soit $\underline{x \in B}$. Considérons les deux cas suivants :

• soit $x \in \overline{A}$ alors $x \in B \cap \overline{A}$ donc $x \in (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$. D'après l'hypothèse de l'énoncé, cela implique que $x \in (A \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{A})$. Or $x \notin A$ donc $x \in C \cap \overline{A}$, en particulier $\underline{x \in C}$ comme voulu.

• soit $x \in A$ donc $x \notin (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$ et d'après l'hypothèse de l'énoncé $x \notin (A \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{A})$. En particulier $x \notin \overline{C}$ donc $\underline{x \in C}$ comme voulu.
On a démontré $B \subset C$.
L'autre inclusion se démontre de manière identique car les hypothèses sur B et C sont symétriques.

$\boxed{9}$ Soient A et B deux parties d'un ensemble E. On suppose qu'il existe $X \subset \overline{A}$ et $Y \subset \overline{B}$ tels que $A \cup Y = B \cup X$. Montrer que $A = B$.

Corrigé : On procède par double inclusion. Soit $\underline{x \in A}$, on a $x \in A \cup Y$ Or $A \cup Y = B \cup X$ donc $x \in B \cup X$, ce qui fait deux cas :

- soit $\underline{x \in B}$: c'est ce que l'on voulait.
- soit $x \in X$, comme $X \subset \overline{A}$, on a $x \in \overline{A}$: c'est contradictoire car $x \in A$. Ce cas ne se produit pas.

Ainsi, on a démontré que $A \subset B$. L'autre inclusion se fait de la même manière et on en déduit que $A = B$.

$\boxed{10}$ ★★ Soit E un ensemble et A et B deux parties non vides de E. Démontrer que :

$$A \cup B = E \Leftrightarrow \Big(\forall X \in \mathcal{P}(E),\ X \neq \emptyset \Rightarrow (X \cap A \neq \emptyset) \text{ ou } (X \cap B \neq \emptyset)\Big)$$

Corrigé : On procède par double implication.

($\Rightarrow$) On suppose que $A \cup B = E$. Prenons $X \in \mathcal{P}(E)$ avec $X \neq \emptyset$ et montrons que $(X \cap A \neq \emptyset)$ ou $(X \cap B \neq \emptyset)$. Comme $X \neq \emptyset$, il existe $x \in X$ et comme $A \cup B = E$ alors $x \in A$ ou $x \in B$. On a bien $(X \cap A \neq \emptyset)$ ou $(X \cap B \neq \emptyset)$ comme voulu. Ce qui démontre cette implication.

$\Leftarrow$ Réciproquement, on suppose que : $\forall X \in \mathcal{P}(E),\ X \neq \emptyset \Rightarrow (X \cap A \neq \emptyset)$ ou $(X \cap B \neq \emptyset)$. Montrons que $A \cup B = E$. Déjà, on sait que $A \cup B \subset E$. Prenons $\underline{x \in E}$ et posons $X = \{x\}$. On a bien $X \neq \emptyset$ donc d'après l'hypothèse $X \cap A \neq \emptyset$ ou $X \cap B \neq \emptyset$. Ce qui se traduit par $\{x\} \cap A \neq \emptyset$ ou $\{x\} \cap B \neq \emptyset$ ou encore $x \in A$ ou $x \in B$. Finalement $\underline{x \in A \cup B}$.

Par double inclusion, on a bien démontré que $A \cup B = E$.