1. Soit $f$ linéaire, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax$. On vérifie la relation (♥) :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f(x) + f(y)$$

$$\boxed{\text{Les fonctions linéaires vérifient la relation (♥)}}$$

2. (a) Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé. La fonction $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme différence de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, puisque par hypothèse $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

   La fonction $f$ vérifie la relation (♥), ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$g(x) = f(x+y) - f(x) = f(y)$$

   La fonction $g$ est constante sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sa dérivée est nulle sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = 0}$$

   (b) D'autre part, si on dérive $g$ en utilisant l'expression la définissant, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = f'(x+y) - f'(x) = 0$$

   En particulier, pour $x = 0$, nous obtenons $f'(y) - f'(0) = 0$, cette relation est bien valable quelque soit $y \in \mathbb{R}$. On note $a = f'(0)$ et on a :

$$\boxed{\exists a \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ f'(y) = a}$$

   (c) On travaille sur l'intervalle $\mathbb{R}$ ainsi la relation de la question précédente nous donne l'existence de $b \in \mathbb{R}$ tel que $f : x \mapsto ax + b$. Cependant avec la relation (♥) utilisée en $x = y = 0$, on obtient directement $f(0) = 0$ donc $b = 0$.

$$\boxed{f \text{ est linéaire}}$$

3. (a) On applique la formule (♥) avec $x = 0$ et $y = 0$, on obtient $f(0) = 2f(0)$. Ce qui démontre que $f(0) = 0$.

$$\boxed{f(0) = 0}$$

   (b) Démontrons par récurrence sur l'entier naturel $n$ que :

$$\mathcal{H}_n\ :\ f(n) = an$$

   - **Initialisation.** $\mathcal{H}_0$ est vraie puisque $f(0) = 0$.
   - **Hérédité.** On suppose $\mathcal{H}_n$ vraie pour un entier naturel $n$ fixé. On a :

$$f(n+1) = f(n) + f(1) = an + a = a(n+1)$$

   Ce qui termine la récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = an}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, on a $-n \in \mathbb{N}$ donc d'après la question pécédente $f(-n) = a(-n)$ et :

$$f(n + (-n)) = f(n) + f(-n) \Leftrightarrow 0 = f(n) + a(-n)$$

Ce qui démontre que $f(n) = an$. Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z},\ f(n) = an}$$

(d) Montrons que cette égalité demeure pour les nombres rationnels. Soit $r = \dfrac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$ap = f(p) = f(qr) = f(\underbrace{r + r + ... + r}_{q \text{ fois}}) = \underbrace{f(r) + f(r) + ... + f(r)}_{q \text{ fois}} = qf(r)$$

En utilisant une récurrence immédiate ainsi que la relation (♥) pour démontrer que
$f(\underbrace{r + r + ... + r}_{q \text{ fois}}) = \underbrace{f(r) + f(r) + ... + f(r)}_{q \text{ fois}}$.

On a bien $f(r) = a\dfrac{p}{q} = ar$.

$$\boxed{\forall r \in \mathbb{Q},\ f(r) = ar}$$

(e) Les fonctions $f$ et $x \mapsto ax$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et l'étude précédente montre qu'elles coïncident sur $\mathbb{Q}$. D'après une propriété du cours, on en déduit que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax}$$

4. (a) i. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On procède par encadrement :

$$10^{n+1}x - 1 < \lfloor 10^{n+1}x \rfloor \leq 10^{n+1}x$$

et

$$10^n x - 1 < \lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^n x \Longrightarrow -10^{n+1}x \leq -10\lfloor 10^n x \rfloor < 10 - 10^{n+1}x$$

En sommant, il vient :

$$-1 < \lfloor 10^{n+1}x \rfloor - 10\lfloor 10^n x \rfloor < 10$$

Étant donné que $\lfloor 10^{n+1}x \rfloor - 10\lfloor 10^n x \rfloor$ est un entier, on en déduit que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \lfloor 10^{n+1}x \rfloor - 10\lfloor 10^n x \rfloor \in [\![0, 9]\!]}$$

ii. Soit $n \in \mathbb{N}$, en utilisant le résultat de la question précédente, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{\lfloor 10^{n+1}x \rfloor}{10^{n+1}} - \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} = \frac{\lfloor 10^{n+1}x \rfloor - 10\lfloor 10^n x \rfloor}{10^{n+1}} \geq 0$$

Ce qui démontre que $(u_n)$ est croissante.

D'autre part, pour $n \in \mathbb{N}$ et toujours en utilisant l'encadrement de la question précédente, on a :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{\lfloor 10^{n+1}x \rfloor + 1}{10^{n+1}} - \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n} = \frac{\lfloor 10^{n+1}x \rfloor - 10\lfloor 10^n x \rfloor - 9}{10^{n+1}} \leq 0$$

La suite $(v_n)$ est décroissante.

$$\boxed{(u_n) \text{ croît et } (v_n) \text{ décroît}}$$

iii. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_n - u_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n} - \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} = \frac{1}{10^n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

D'après la question précédente, toutes les conditions sont réunies pour affirmer que :

$$\boxed{(u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont adjacentes}}$$

iv. On a :

$$\lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^n x < \lfloor 10^n x \rfloor + 1 \Longrightarrow \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \leq x < \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq x \leq v_n}$$

v. Les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ étant adjacentes, elles convergent vers une limite commune, notons-là $l \in \mathbb{R}$. On passe à la limite dans la relation trouvée à la question précédente : $l \leq x \leq l$. On en déduit que $l = x$ et que $(u_n)$ et $(v_n)$ convergent vers $x$.

$$\boxed{(u_n) \text{ et } (v_n) \text{ convergent vers } x}$$

(b) Par croissance de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n \leq x \leq v_n \Longrightarrow f(u_n) \leq f(x) \leq f(v_n)$$

Or $u_n$ et $v_n$ sont des nombres rationnels donc d'après la question 3.(d), on a : $f(u_n) = au_n$ et $f(v_n) = av_n$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ au_n \leq f(x) \leq av_n}$$

(c) On passe à la limite dans la relation précédente pour obtenir $ax \leq f(x) \leq ax$. On vient de démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax$.

$$\boxed{f \text{ est linéaire}}$$

(d) Réciproquement une fonction linéaire vérifie (♥) comme nous l'avons démontré dans la question 1. et elle est croissante si et seulement si $a \geq 0$.

$$\boxed{\text{Les fonctions croissantes qui vérifient } (\heartsuit) \text{ sont de la forme } x \mapsto ax \text{ avec } a \geq 0}$$

5. (a) D'après la relation de l'énoncé, on a $f(1) = f(1 \times 1) = f(1) \times f(1) = f(1)^2$. On en déduit que $f(1) = 0$ ou $f(1) = 1$.

$$\boxed{f(1) = 0 \text{ ou } f(1) = 1}$$

(b) Soit $x \geq 0$, on a :

$$f(x) = f(\sqrt{x} \times \sqrt{x}) = f(\sqrt{x})f(\sqrt{x}) = f(\sqrt{x})^2 \geq 0$$

$$\boxed{\forall x \geq 0,\ f(x) \geq 0}$$

(c) Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x \leq y$, on a $y - x \geq 0$ donc $f(y-x) \geq 0$. En utilisant la relation (♥), on a :

$$f(y) = f(x + (y-x)) = f(x) + \underbrace{f(y-x)}_{\geq 0} \geq f(x)$$

On a démontré que :

$$x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$$

$$\boxed{f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}}$$

(d) La fonction $f$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et vérifie (♥), d'après la question 4., on en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax$. Or d'après la question 5.(a), on a $f(1) = 0$ ou $f(1) = 1$ donc $a \in \{0,1\}$. On vérifie immédiatement que la fonction nulle et la fonction identité vérifient les hypothèses de la question 5.

$$\boxed{f = 0 \text{ ou } f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}}$$

6. (a) Soit $x \in [0, b-a]$, on a $x + a \in [a,b]$ et d'après la relation (♥), on a :

$$|f(x)| = |f(x+a) - f(a)| \leq |f(x+a)| + |f(a)| \leq 2M$$

$$\boxed{f \text{ est bornée sur } [0, b-a]}$$

(b) i. Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$g(x+y) = f(x+y) - c(x+y) = (f(x) - cx) + (f(y) - cy) = g(x) + g(y)$$

$$\boxed{g \text{ vérifie la relation } (\heartsuit)}$$

ii. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$g(x+d) = g(x) + g(d) = g(x) + (f(d) - cd) = g(x) + \left(f(d) - \frac{f(d)}{d}d\right) = g(x)$$

$$\boxed{g \text{ est } d\text{-périodique}}$$

iii. La fonction $g$ est la somme de deux fonctions bornées sur $[0, b-a]$ ainsi $g$ est bornée sur $[0,d]$. Or $g$ est $d$-périodique et bornée sur l'une de ses périodes ainsi elle est bornée sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{g \text{ est bornée sur } \mathbb{R}}$$

iv. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $g(x_0) \neq 0$. Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que :

$$\mathcal{H}_n \; : \; g(nx_0) = ng(x_0)$$

- **Initialisation.** Pour $n = 0$ la relation est évidente car $g(0) = f(0) = 0$ puisque $f$ vérifie (♥).

- **Hérédité.** On suppose $\mathcal{H}_n$ vraie pour $n \in \mathbb{N}$ fixé. Étant donné que $g$ vérifie la relation (♥), on a :

$$g((n+1)x_0) = g(nx_0 + x_0) = g(nx_0) + g(x_0) = ng(x_0) + g(x_0) = (n+1)g(x_0)$$

On en déduit que $\mathcal{H}_n$ est vraie, ce qui termine la récurrence.

On a $|g(nx_0)| = |ng(x_0)| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ car $g(x_0) \neq 0$. C'est clairement contradictoire avec le fait que $g$ soit bornée sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{g \text{ est la fonction nulle}}$$

(c) On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - cx = 0$.

$$\boxed{f \text{ est linéaire}}$$

7. (a) Soit $x \in \mathbb{R}^*$, si $x > 0$, on a :

$$\varphi(x) = x + \frac{1}{x} = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + 2 \geq 2$$

Si $x < 0$, on a, par imparité de la fonction $\varphi$, $\varphi(x) \leq -2$. Finalement :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, \ |\varphi(x)| \geq 2}$$

(b) En utilisant les relations vérifiées par $f$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ :

$$|f(\varphi(x))| = \left|f\left(x + \frac{1}{x}\right)\right| = \left|f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)\right| = \left|f(x) + \frac{1}{f(x)}\right| = |\varphi(f(x))| \geq 2$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, \ |f(\varphi(x))| \geq 2}$$

(c) Une rapide étude des variations de la fonction $\varphi$ permet de voir que $\varphi(\mathbb{R}^*) = ]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$, ainsi si $y \in \mathbb{R}$ vérifie $|y| \geq 2$ alors il existe $x \in \mathbb{R}^*$ tel que $y = \varphi(x)$. D'après la question précédente, on a :

$$|f(y)| = |f(\varphi(x))| \geq 2$$

$$\boxed{\forall y \in \mathbb{R}, \ |y| \geq 2 \Longrightarrow |f(y)| \geq 2}$$

(d) Soit $x \in \mathbb{R}^*$ tel que $|x| \leq \frac{1}{2}$, on a $\left|\frac{1}{x}\right| \geq 2$ et d'après la question précédente, on a :

$$|f(x)| = \frac{1}{\left|f\left(\frac{1}{x}\right)\right|} \leq \frac{1}{2}$$

De plus, d'après la question 3.(a), on a $f(0) = 0$ donc $f$ est bornée sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

$$\boxed{f \text{ est bornée sur } \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]}$$

(e) D'après la question 6., étant donné que $f$ est bornée sur un intervalle, on en déduit que $f$ est linéaire, c'est-à-dire qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax$. Enfin, si on utilise la relation de l'hypothèse, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{a}{x} = \frac{1}{ax} = \frac{1}{f(x)}$$

En $x = 1$, on obtient $a = \dfrac{1}{a}$, c'est-à-dire $a = 1$ ou $a = -1$.

Réciproquement, on vérifie que $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ et $-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ conviennent.

$$\boxed{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}} \text{ et } -\mathrm{Id}_{\mathbb{R}} \text{ sont les solutions}}$$

8. Au vu des questions précédentes, le plus rapide est de raisonner de la façon suivante. La fonction $f$ est continue en $x_0$ ainsi elle est bornée au voisinage de $x_0$, d'après la question 6., on en déduit que $f$ est linéaire.

$$\boxed{f \text{ est linéaire}}$$