Exercice 1

1. Notons I l'intervalle I_+ ou I_-. Sur I, on peut réécrire l'équation sous la forme :

$$(E) : y' + \frac{x}{1-x}y = \frac{e^x}{1-x}$$

On considère la fonction définie sur I par $a : x \mapsto \dfrac{x}{1-x}$. Afin de trouver une primitive de a, on peut effectuer la transformation suivante :

$$a(x) = \frac{x}{1-x} = \frac{x-1+1}{1-x} = \frac{x-1}{1-x} + \frac{1}{1-x} = -1 + \frac{1}{1-x}$$

Une primitive de a est la fonction définie sur I par $A : x \mapsto -x - \ln(|1-x|)$. Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation homogène est

$$\mathcal{S}_H = \left\{ \begin{array}{cccl} y & : & I & \to \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto \lambda e^{x+\ln(|1-x|)} = \lambda e^x |1-x| \end{array},\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Il reste à trouver une solution particulière à l'aide de la méthode la variation de la constante. Pour simplifier l'étude distinguons les intervalles I_- et I_+ :

► Commençons par I_- et remarquons que pour tout $x \in I_-$, on a $|1-x| = 1-x$, ce qui permet de simplifier les solutions de l'équation homogène trouvées précédemment. On considère la fonction définie sur I_- par $y_0 : x \mapsto \lambda(x)(e^x(1-x))$ où λ est une fonction dérivable sur I_- à déterminer. La fonction y_0 est dérivable sur I_- comme produit de fonctions dérivables sur I_- et pour tout $x \in I_-$:

$$y_0'(x) = \lambda'(x)(e^x(1-x)) + \lambda(x)(e^x(1-x) - e^x) = \lambda'(x)(e^x(1-x)) + \lambda(x)(-xe^x)$$

On a :

$$\begin{aligned} y_0 \text{ solution de } (E) \text{ sur } I_- \quad & \Leftrightarrow \quad \forall x \in I_-,\ y_0'(x) + \frac{x}{1-x}y_0(x) = \frac{e^x}{1-x} \\ & \Leftrightarrow \quad \forall x \in I_-,\ \lambda'(x)(e^x(1-x)) + \lambda(x)(-xe^x) + \frac{x}{1-x}\lambda(x)(e^x(1-x)) = \frac{e^x}{1-x} \\ & \Leftrightarrow \quad \forall x \in I_-,\ \lambda'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

On peut choisir $\lambda : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ et par suite $y_0 : x \mapsto e^x$ est une solution particulière sur I_-.
Finalement l'ensemble des solutions sur I_- de l'équation (E) est :

$$\boxed{\mathcal{S}_- = \left\{ \begin{array}{cccl} y & : & I_- & \to \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto e^x + \lambda e^x(1-x) \end{array},\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$$

► Sur I_+, le calcul est similaire et on trouve également que $x \mapsto e^x$ est une solution particulière de (E).
L'ensemble des solutions sur I_+ de l'équation (E) est :

$$\boxed{\mathcal{S}_+ = \left\{ \begin{array}{cccl} y & : & I_+ & \to \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto e^x + \lambda e^x(x-1) \end{array},\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$$

On remarque que, quitte à changer λ en $-\lambda$, l'expression des solutions est la même sur I_- et sur I_+.

2. On procède par analyse-synthèse.

   ► **Analyse.** Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable et solution de (E). En prenant $x=1$ dans l'équation (E), on obtient immédiatement que $f(1)=e$. Comme f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$, elle est en particulier solution sur I_- et sur I_+. D'après l'étude menée à la question précédente ceci implique qu'il existe λ et μ deux réels tels que :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} e^x+\lambda e^x(1-x) & \text{si} \quad x<1 \\ e & \text{si} \quad x=1 \\ e^x+\mu e^x(x-1) & \text{si} \quad x>1 \end{cases} \end{array}$$

   • La fonction f est supposée dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier elle est continue sur $\mathbb{R}$. L'expression précédente de f démontre clairement la continuité sur I_- et I_+, il reste à vérifier la condition au point 1. On a :

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} e^x+\lambda e^x(1-x) = e = f(1)$$

   et :

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} e^x+\mu e^x(x-1) = e = f(1)$$

   Ce qui démontre que quelque soient λ et μ réels la fonction est continue en 1.

   • La fonction f est supposée dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier elle est dérivable en 1 ce qui impose que les taux de variations suivants sont égaux :

$$\begin{gathered} \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \\ \Leftrightarrow \\ \lim_{x\to 1^-} \frac{e^x+\lambda e^x(1-x)-e}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{e^x+\mu e^x(x-1)-e}{x-1} \\ \Leftrightarrow \\ \lim_{x\to 1^-} \left(\frac{e^x-e}{x-1} - \lambda e^x\right) = \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{e^x-e}{x-1} + \mu e^x\right) \\ \Leftrightarrow \\ -\lambda = \mu \end{gathered}$$

   Ceci puisque $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^x-e}{x-1} = e$ en reconnaissant un taux de variation.

   À ce stade de l'étude, on peut condenser l'expression de la fonction f en tenant compte de la condition trouvée :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x+\lambda e^x(1-x) \end{array}$$

   ► **Synthèse.** On vérifie sans problème que la fonction ci-dessus vérifie l'équation (E).

   L'ensemble des fonctions dérivables solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est :

$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{ y : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x+\lambda e^x(1-x) \end{array}, \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$$

3. En réutilisant l'expression des solutions trouvée à la question précédente, on a pour tout $k \in \mathbb{R}$:

$$f(0) = k \Leftrightarrow 1+\lambda = k \Leftrightarrow \lambda = k-1$$

$$\boxed{f_k : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x+e^x(k-1)(1-x) \end{array}}$$

4. La fonction f_k est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_k'(x) = e^x + e^x(k-1)(1-x) - e^x(k-1) = e^x(1-(k-1)x)$$

On a immédiatement pour $k \neq 1$:

$$f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{k-1}$$

Le comportement de la fonction f_k dépend de k, il y a plusieurs cas à distinguer :

▶ Si $k = 1$, la fonction f_1 est la fonction exponentielle que l'on connaît bien.

▶ Si $k > 1$, on a le tableau de variations suivant :

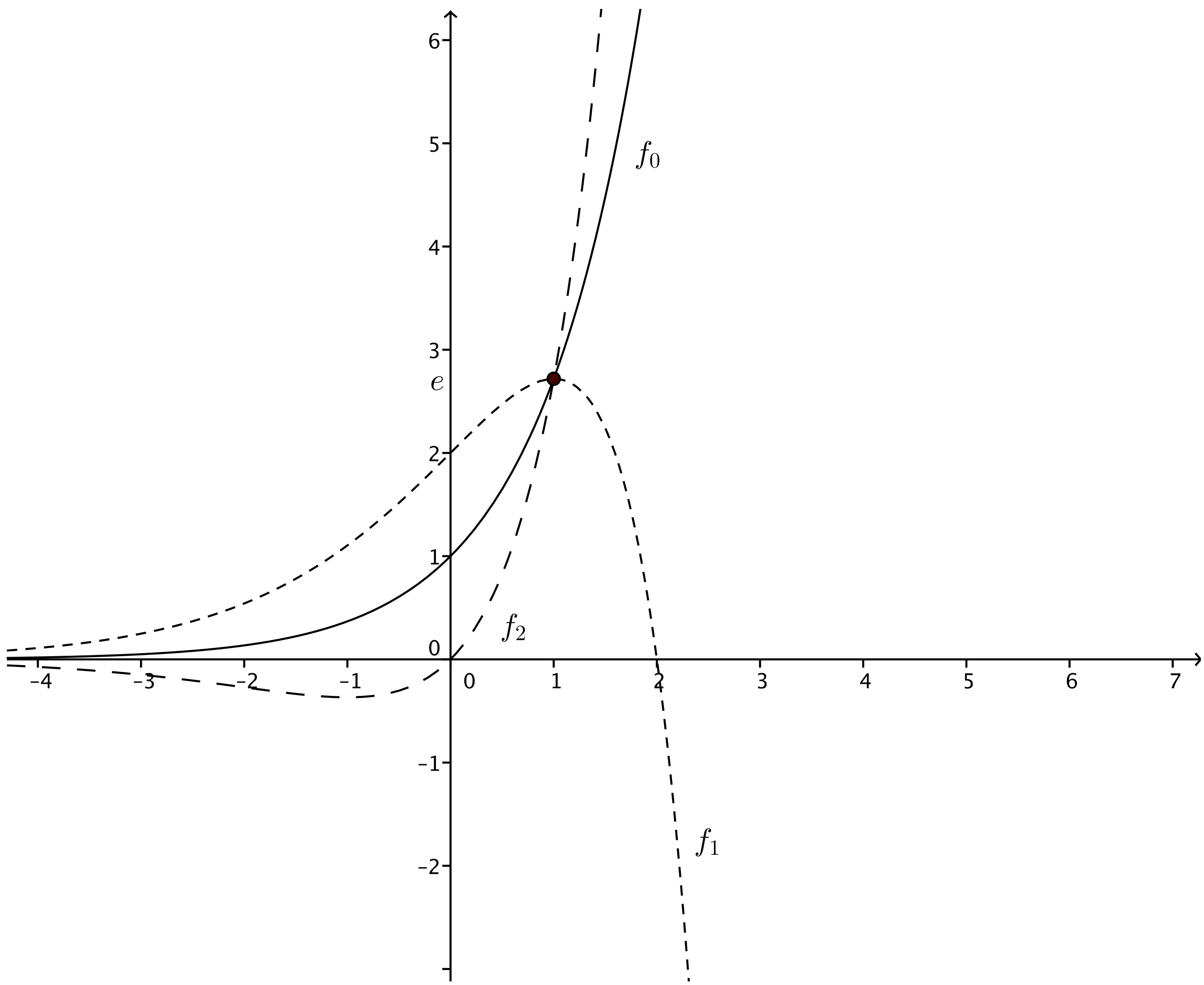
x	$-\infty$		$\frac{1}{k-1}$		$+\infty$
$f_k'(x)$		$+$	0	$-$	
f_k	0	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

▶ Si $k < 1$, on a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{k-1}$		$+\infty$
$f_k'(x)$		$-$	0	$+$	
f_k	0	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

D'après l'étude précédente, la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe représentative de f_k au voisinage de $-\infty$.

Pour tout $k \in \mathbb{R}$, on a : $f_k'(0) = 1$, ainsi la tangente en 0 à la courbe représentative de f_k a pour équation $y = x + k$. Grâce à l'étude précédente, on obtient le graphique suivant :



On remarque que toutes ces courbes se coupent au point $(1, e)$, en effet les fonctions f_k sont solutions de :

$$(E) \ : \ (1-x)y' + xy = e^x$$

et en prenant $x = 1$, on trouve $f_k(1) = e$.
Le problème suivant :

$$\begin{cases} (1-x)y' + xy & = & e^x \\ y(1) = e \end{cases}$$

admet plusieurs solutions. Ceci n'est pas contradictoire avec l'unicité d'une solution à un problème de Cauchy, puisque ce n'est pas un problème de Cauchy, à cause de la fonction qui est en facteur de y'.

Exercice 2

1. L'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ solutions de (F_1) est :

$$\boxed{\{x \mapsto \lambda e^x,\ \lambda \in \mathbb{R}\}}$$

2. On procède par double implication.

   $(\Rightarrow)$ On suppose que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est solution de (E_1). Cela implique que f est dérivable trois fois sur $\mathbb{R}$, ainsi $g = f'' + f' + f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g' = f^{(3)} + f'' + f$. Étant donné que $f^{(3)} = f$, on a bien $f^{(3)} + f'' + f' = f + f' + f''$, ainsi g est solution sur $\mathbb{R}$ de (F_1).

   $(\Leftarrow)$ Réciproquement, on suppose que $g = f'' + f' + f$ est solution de (F_1) avec f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable deux fois. En particulier g est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc $f'' = g - f' - f$ est dérivable comme somme de fonctions dérivables, c'est-à-dire que f est dérivable trois fois sur $\mathbb{R}$. On a :

$$g' = g \Leftrightarrow f^{(3)} + f'' + f' = f'' + f' + f \Leftrightarrow f^{(3)} = f$$

   Ce qui démontre que f est solution de (E_1).

$$\boxed{f \text{ solution de } (E_1) \text{ si et seulement si } g \text{ solution de } (F_1)}$$

3. On conserve les notations de la question précédente, on a $g : x \mapsto \lambda e^x$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ étant donné que g est solution de (F_1). Les solutions de (E_1) sont alors les solutions de :

$$y'' + y' + y = \lambda e^x$$

   On commence par la résolution de l'équation homogène, l'équation caractéristique s'écrit $X^2 + X + 1 = 0$, les solutions sont $\dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. D'après le cours, les solutions à valeurs réelles de l'équation homogène sont les fonctions :

$$x \mapsto e^{-\frac{1}{2}x}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$$

   avec A et B deux constantes réelles.

   On constate que $x \mapsto \dfrac{1}{3}\lambda e^x$ est une solution particulière évidente de l'équation. Finalement, en sommant, les fonctions solutions de (E_1) sont de la forme :

$$x \mapsto \frac{1}{3}\lambda e^x + e^{-\frac{1}{2}x}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$$

   On pose $C = \dfrac{1}{3}\lambda$, quand λ décrit $\mathbb{R}$, C décrit $\mathbb{R}$. L'ensemble des solutions de (E_1) est :

$$\boxed{\left\{x \mapsto Ce^x + e^{-\frac{1}{2}x}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right),\ (A, B, C) \in \mathbb{R}^3\right\}}$$

4. On a envie de poser également $g = f^{(3)} + f'' + f' + f$, ainsi f est solution de (E_2) si et seulement si g est solution de (F_1). Cependant, contrairement à la question précédente, nous n'allons pas savoir résoudre l'équation : $y^{(3)} + y'' + y' + y = \lambda e^x$.

   La bonne technique consiste à poser $h = f + f''$. Montrons que f est solution de (E_2) si et seulement si h est solution de l'équation $(F_2)\ :\ y'' = y$.

($\Rightarrow$) On suppose que f est solution de (E_2) alors f est dérivable quatre fois sur $\mathbb{R}$ donc h est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ et $h'' = f'' + f^{(4)}$. On a bien $h'' = h$ puisque $f^{(4)} = f$.

($\Leftarrow$) Réciproquement si h est solution de (F_2) sur $\mathbb{R}$ alors h est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$. On en déduit que $f'' = h - f$ est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables deux fois sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que f est bien dérivable quatre fois sur $\mathbb{R}$. On a : $h'' = h$ donc $f'' + f^{(4)} = f + f''$, c'est-à-dire que f vérifie (E_2).

Les fonctions h solutions sur $\mathbb{R}$ de (F_2) sont de la forme $h : x \mapsto \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{-x}$ où $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Il reste à résoudre : $f'' + f = h$ avec h qui est l'une de ces fonctions. On obtient immédiatement que l'équation homogène admet pour solution les fonctions $x \mapsto A\cos(x) + B\sin(x)$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. D'autre part, $\frac{1}{2}h$ est une solution particulière évidente. On note $C = \frac{1}{2}\lambda_1$ et $D = \frac{1}{2}\lambda_2$, qui décrivent $\mathbb{R}$ quand λ_1 et λ_2 décrivent $\mathbb{R}$. Ainsi les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ qui vérifient (E_2) sont :

$$\boxed{\left\{x \mapsto A\cos(x) + B\sin(x) + Ce^x + De^{-x},\ (A, B, C, D) \in \mathbb{R}^4\right\}}$$

On peut aussi décrire l'ensemble ainsi :

$$\left\{x \mapsto A\cos(x) + B\sin(x) + C'\mathrm{ch}(x) + D'\mathrm{sh}(x),\ (A, B, C', D') \in \mathbb{R}^4\right\}$$