Partie A - Cas où $\alpha = 1$

1. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [k, k+1]$. Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [k, k+1], \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$$

- (b) Par croissance de l'intégrale, on peut intégrer l'inégalité précédente entre k et $k+1$, ce qui donne :

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{k}$$

Or :

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{k+1} = \left[\frac{x}{k+1} \right]_k^{k+1} = \frac{k+1}{k+1} - \frac{k}{k+1} = \frac{1}{k+1}$$

De même, on démontre que : $\int_k^{k+1} \frac{dx}{k} = \frac{1}{k}$.

C'est-à-dire :

$$\frac{1}{k+1} \leq \left[\ln(x) \right]_k^{k+1} \leq \frac{1}{k}$$

Ce qui donne bien :

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

- (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On somme les inégalités précédentes pour k allant de 1 à n :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^n \left(\ln(k+1) - \ln(k) \right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

On remarque que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1} = H_{n+1} - 1$$

La somme centrale se simplifie en cascade :

$$\sum_{k=1}^n \left(\ln(k+1) - \ln(k) \right) = (\ln(2) - \ln(1)) + (\ln(3) - \ln(2)) + (\ln(4) - \ln(3)) + \cdots + (\ln(n+1) - \ln(n)) = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1)$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$H_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) - \ln(1) \leq H_n \quad (\star)$$

L'inégalité de droite nous donne : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+1) \leq H_n$

D'autre part, on peut utiliser l'inégalité $(\star)$ avec " $n = n-1$ ", c'est-à-dire :

$$\forall n \geq 2, H_n - 1 \leq \ln(n) \leq H_{n-1}$$

En particulier, pour $n \geq 2$, on a : $H_n \leq \ln(n) + 1$. On vérifie que cette inégalité demeure pour $n = 1$.

Finalement avec les inégalités soulignées, nous obtenons :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$$

(d) On a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) = +\infty$, d'après l'inégalité obtenue à la question précédente, cela implique que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n = +\infty$$

(e) Pour démontrer ceci, on divise l'inégalité obtenue à la question (c) par $\ln(n)$, ce qui donne :

$$\forall n \geq 2, \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leq \frac{H_n}{\ln(n)} \leq \frac{\ln(n)+1}{\ln(n)}$$

Pour tout $n \geq 2$, on a : $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n)}{\ln(n)} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$

D'autre part, pour $n \geq 2$, on a : $\frac{\ln(n)+1}{\ln(n)} = 1 + \frac{1}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$

Ainsi, d'après le théorème d'encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{H_n}{\ln(n)} = 1$$

2. (a) i. Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} - u_n = (H_{n+1} - \ln(n+1)) - (H_n - \ln(n)) = H_{n+1} - H_n - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n)$$

Ici, on peut poser une fonction et l'étudier mais il est plus simple d'utiliser l'inégalité démontrée à la question 1.(b), pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n)$. Ce qui démontre bien que $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

$$(u_n) \text{ est décroissante}$$

ii. On utilise la même méthode qu'à la question précédente toujours avec la question 1.(b) :

$$v_{n+1} - v_n = \left(H_{n+1} - \frac{1}{n+1} - \ln(n+1)\right) - \left(H_n - \frac{1}{n} - \ln(n)\right) = \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n) \geq 0$$

$$(v_n) \text{ est décroissante}$$

iii. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_n - v_n = \frac{1}{n}$ ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$$

iv. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, d'après les trois questions précédentes, on a :

$$v_1 \leq v_n \leq u_n \leq u_1 \quad (\star\star)$$

La suite (u_n) est décroissante et minorée par v_1 , d'après le théorème de la limite monotone elle converge vers une limite réelle que l'on va noter α .

La suite (v_n) est croissante et majorée par u_1 , elle converge vers une limite réelle que l'on va noter β .

Or, d'après la question précédente, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - v_n = \alpha - \beta = 0$. Ainsi $\alpha = \beta$ et :

$$\text{les suites } (u_n) \text{ et } (v_n) \text{ convergent vers une limite commune}$$

- (b) On reprend l'inégalité (★★) démontrée à la question précédente et l'on passe à la limite dans cette inégalité. Cela donne : $v_1 \leq \gamma \leq u_1$. Or $v_1 = 0$ et $u_1 = 1$. Ce qui démontre que :

$$0 \leq \gamma \leq 1$$

- (c) La suite (u_n) converge en décroissant vers γ et la suite (v_n) converge en croissant vers γ , ainsi pour tout entier naturel non nul n , on a : $v_n \leq \gamma \leq u_n$. Comme $v_n = u_n - \frac{1}{n}$, cela se traduit par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n - \frac{1}{n} \leq \gamma \leq u_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_n - \gamma \leq \frac{1}{n}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_n - \gamma \leq \frac{1}{n}$$

On a $\gamma \approx 0.577215664901532$. La constante γ intervient dans de nombreux domaines des mathématiques, à titre d'exemple on peut citer :

- $\int_0^1 \ln\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right) dx = -\gamma$
- $\int_0^{+\infty} e^{-x} \ln(x) dx = -\gamma$
- Le nombre moyen de diviseurs d'un entier naturel n est de l'ordre de grandeur de : $\ln(n) + 2\gamma - 1$.

- (d) À la question 2.(c), on a démontré que pour tout entier naturel non nul n , on a : $0 \leq u_n - \gamma \leq \frac{1}{n}$. En remplaçant u_n par sa définition, on a : $0 \leq H_n - \ln(n) - \gamma \leq \frac{1}{n}$. Ce qui démontre que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n) + \gamma \leq H_n \leq \ln(n) + \gamma + \frac{1}{n}$$

Partie B - Cas où $\alpha = 2$

1. (a) Pour tout $k \geq 2$, on a $k \geq k - 1$ ce qui implique que $k^2 \geq k(k - 1)$. En passant à l'inverse, on obtient :

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

La dernière égalité provenant simplement d'une réduction au même dénominateur. On a démontré que :

$$\forall k \geq 2, \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

- (b) On a, en utilisant l'inégalité précédente :

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2} \\ &\leq 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}\right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Chaque terme étant majoré par celui qui se trouve en dessous.

Dans la dernière expression, on voit les simplifications en cascades qui se produisent :

$$\begin{aligned} 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}\right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\ = 2 - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

On obtient : $S_n \leq 2 - \frac{1}{n} \leq 2$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n \leq 2$$

- (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déterminons le signe de $S_{n+1} - S_n$:

$$S_{n+1} - S_n = \left(1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\right) - \left(1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{(n+1)^2} > 0.$$

Ceci montre que :

$$(S_n) \text{ est strictement croissante}$$

- (d) D'après le théorème de la limite monotone toute suite croissante et majorée converge. D'après 1.(b) la suite (S_n) est majorée et d'après 1.(c) elle est croissante d'où :

$$(S_n) \text{ converge}$$

2. (a) On a :

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^0 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = \frac{\pi}{2}. \\ J_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos(t)^0 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{24}. \\ I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt = \left[\sin(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1. \end{aligned}$$

- (b) Le calcul de J_1 va demander un peu plus de travail, il va falloir faire deux intégrations par parties successives. L'idée est de faire chuter le degré la fonction $t \mapsto t^2$ en dérivant. On pose :

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= \cos(t) & u_1(t) &= \sin(t) \\ v_1(t) &= t^2 & v_1'(t) &= 2t \end{aligned}$$

Les fonctions u_1, v_1, u_1' et v_1' sont continues sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on peut ainsi utiliser la formule d'intégration par parties :

$$J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{t^2}_{v_1(t)} \underbrace{\cos(t)}_{u_1'(t)} dt = \left[\underbrace{t^2}_{v_1(t)} \underbrace{\sin(t)}_{u_1(t)} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{2t}_{v_1'(t)} \underbrace{\sin(t)}_{u_1(t)} dt = \frac{\pi^2}{4} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin(t) dt.$$

Pour calculer cette dernière intégrale, on fait à nouveau une intégration par parties :

$$\begin{aligned} u_2(t) &= t & u_2'(t) &= 1 \\ v_2'(t) &= \sin(t) & v_2(t) &= -\cos(t) \end{aligned}$$

Les fonctions u_2, v_2, u_2' et v_2' sont continues sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on peut ainsi utiliser la formule d'intégration par parties :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin(t) dt = \underbrace{\left[-t \cos(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt = \left[\sin(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

On obtient ainsi :

$$J_1 = \frac{\pi^2}{4} - 2.$$

En résumé, on a les valeurs suivantes qui nous serviront dans la suite :

$$\boxed{\begin{aligned} I_0 &= \frac{\pi}{2} & J_0 &= \frac{\pi^3}{24} \\ I_1 &= 1 & J_1 &= \frac{\pi^2}{4} - 2 \end{aligned}}$$

- (c) Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\cos(t) > 0$ et par suite $\cos(t)^k > 0$. Par positivité de l'intégrale, cela donne :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, I_k > 0}$$

- (d) Pour effectuer une intégration par parties, il faut faire apparaître un produit de fonctions, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$I_{k+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^{k+2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \cos(t)^{k+1} dt.$$

On pose :

$$\begin{aligned} u'(t) &= \cos(t) & u(t) &= \sin(t) \\ v(t) &= \cos(t)^{k+1} & v'(t) &= (k+1)(-\sin(t)) \cos(t)^k \end{aligned}$$

Les fonctions u, v, u' et v' sont continues sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on peut ainsi utiliser la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned}
 I_{k+2} &= \underbrace{\left[\cos(t)^{k+1} \sin(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (k+1) \sin(t)^2 \cos(t)^k dt = (k+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos(t)^2) \cos(t)^k dt \\
 &= (k+1) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^k dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{k+2}(t) dt \right) = (k+1)I_k - (k+1)I_{k+2}.
 \end{aligned}$$

C'est-à-dire que $(k+2)I_{k+2} = (k+1)I_k$. On a bien démontré que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, I_{k+2} = \frac{k+1}{k+2} I_k$$

- (e) i. Pour démontrer ceci, étudions la fonction $f : t \mapsto \frac{\pi}{2} \sin(t) - t$, le but de la question est de prouver que f est positive quand $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. La fonction f est dérivable et :

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], f' : t \mapsto \frac{\pi}{2} \cos(t) - 1$$

ceci montre que f' est strictement décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ puisque la fonction cosinus l'est. De plus $f'(0) = \frac{\pi}{2} - 1 > 0$ et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$. La fonction f' est continue et strictement décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $f'(\alpha) = 0$, d'où le tableau de variation :

t	0	α	$\frac{\pi}{2}$
$f'(t)$		+	0 -
$f(t)$	0		0

Ce qui prouve que : $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], f(t) \geq 0$. On a démontré que :

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \sin(t)$$

- ii. Soit $k \in \mathbb{N}$, en élevant au carré l'inégalité obtenue à la question précédente et en la multipliant par $\cos(t)^k$ qui est positif pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a :

$$0 \leq t^2 \cos(t)^k \leq \frac{\pi^2}{4} \sin(t)^2 \cos(t)^k = \frac{\pi^2}{4} (1 - \cos(t)^2) \cos(t)^k = \frac{\pi^2}{4} (\cos(t)^k - \cos(t)^{k+2}).$$

Par positivité de l'intégrale, intégrons l'inégalité précédente entre 0 et $\frac{\pi}{2}$:

$$0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos(t)^k dt \leq \frac{\pi^2}{4} (I_k - I_{k+2}).$$

On a démontré que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, 0 \leq J_k \leq \frac{\pi^2}{4} (I_k - I_{k+2})$$

- iii. Soit $k \in \mathbb{N}$, on divise la relation obtenue à la question précédente par I_k qui est strictement positif d'après la question 2.(c), cela donne :

$$0 \leq \frac{J_k}{I_k} \leq \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{I_k}{I_k} - \frac{I_{k+2}}{I_k} \right) = \frac{\pi^2}{4} \left(1 - \frac{k+1}{k+2} \right)$$

ceci d'après la formule de la question 2.(d).

Or $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k+1}{k+2} = 1$ et par suite : $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\pi^2}{4} \left(1 - \frac{k+1}{k+2} \right) = 0$.

La suite $\left(\frac{J_k}{I_k} \right)$ est encadrée par deux suites qui tendent vers 0, donc d'après le théorème d'encadrement :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{J_k}{I_k} = 0$$

- (f) i. Là aussi il s'agit d'utiliser la méthode d'intégration par parties, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \cos(t)^{k+2} & u_1'(t) &= (k+2)(-\sin(t))\cos(t)^{k+1} \\ v_1'(t) &= 1 & v_1(t) &= t \end{aligned}$$

Les fonctions u_1 , v_1 , u_1' et v_1' sont continues sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on peut ainsi utiliser la formule d'intégration par parties :

$$I_{k+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^{k+2} dt = \underbrace{\left[t \cos(t)^{k+2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + (k+2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin(t) \cos(t)^{k+1} dt. \quad (\star)$$

Pour transformer encore cette dernière intégrale, effectuons une nouvelle intégration par parties, on pose :

$$\begin{aligned} u_2(t) &= \sin(t) \cos(t)^{k+1} & u_2'(t) &= \cos(t)^{k+2} - (k+1) \sin(t)^2 \cos^k(t) \\ v_2'(t) &= t & v_2(t) &= \frac{t^2}{2} \end{aligned}$$

Les fonctions u_2 , v_2 , u_2' et v_2' sont continues sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on peut ainsi utiliser la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin(t) \cos(t)^{k+1} dt &= \underbrace{\left[\frac{t^2}{2} \sin(t) \cos(t)^{k+1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2}{2} \left(\cos(t)^{k+2} - (k+1) \sin(t)^2 \cos^k(t) \right) dt \\ &= -\frac{1}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos(t)^{k+2} dt \right) + \frac{k+1}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 (1 - \cos(t)^2) \cos^k(t) dt \right) \\ &= -\frac{1}{2} J_{k+2} + \frac{k+1}{2} (J_k - J_{k+2}). \end{aligned}$$

En injectant ce résultat dans l'expression $(\star)$, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, I_{k+2} = \frac{(k+1)(k+2)J_k - (k+2)^2 J_{k+2}}{2}$$

ii. Divisons la relation précédente par I_{k+2} qui est non nul d'après la question 2.(c), ceci donne :

$$1 = \frac{1}{2} \left((k+1)(k+2) \frac{J_k}{I_{k+2}} - (k+2)^2 \frac{J_{k+2}}{I_{k+2}} \right)$$

Or $\frac{J_k}{I_{k+2}} = \frac{J_k}{\frac{k+1}{k+2} I_k} = \frac{k+2}{k+1} \frac{J_k}{I_k}$, d'où :

$$1 = \frac{1}{2} \left((k+2)^2 \frac{J_k}{I_k} - (k+2)^2 \frac{J_{k+2}}{I_{k+2}} \right).$$

C'est-à-dire :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \frac{J_k}{I_k} - \frac{J_{k+2}}{I_{k+2}} = \frac{2}{(k+2)^2}$$

iii. Sommons pour k allant de 0 à $n-2$ les égalités précédentes :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{J_0}{I_0} - \frac{J_2}{I_2} \right) + \left(\frac{J_1}{I_1} - \frac{J_3}{I_3} \right) + \left(\frac{J_2}{I_2} - \frac{J_4}{I_4} \right) + \left(\frac{J_3}{I_3} - \frac{J_5}{I_5} \right) + \dots + \left(\frac{J_{n-3}}{I_{n-3}} - \frac{J_{n-1}}{I_{n-1}} \right) + \left(\frac{J_{n-2}}{I_{n-2}} - \frac{J_n}{I_n} \right) \\ &= 2 \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2} \right). \end{aligned}$$

Il y a des simplifications en cascades dans le membre de gauche, il reste :

$$\frac{J_0}{I_0} + \frac{J_1}{I_1} - \frac{J_{n-1}}{I_{n-1}} - \frac{J_n}{I_n} = 2(S_n - 1).$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{J_{n-1}}{I_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{J_n}{I_n} = 0$ d'après la question 2.(e).iii. Notons $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$, qui existe d'après la question 1. et passons à la limite dans la relation précédente :

$$\frac{J_0}{I_0} + \frac{J_1}{I_1} = 2(l - 1).$$

D'après la question 2.(a), on connaît toutes les valeurs mises en jeu et on peut trouver la limite l voulue :

$$\frac{\frac{\pi^3}{24}}{\frac{\pi}{2}} + \frac{\frac{\pi^2}{4} - 2}{1} = 2(l - 1) \Leftrightarrow \frac{\pi^2}{12} + \frac{\pi^2}{4} - 2 = 2l - 2 \Leftrightarrow l = \frac{\pi^2}{6}.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{\pi^2}{6}$$

Partie C - Cas général

1. Soit $\alpha \leq 1$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $\alpha \ln(k) \leq \ln(k)$ car $\alpha \leq 1$ donc $e^{\alpha \ln(k)} \leq e^{\ln(k)}$ par croissance de la fonction exponentielle. Ceci nous donne $k^\alpha \leq k$ et en passant à l'inverse $\frac{1}{k^\alpha} \geq \frac{1}{k}$.

On somme pour k allant de 1 à n avec $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Dans la partie A, nous avons démontré que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = +\infty$, d'après le théorème de comparaison, on en déduit que (S_n) diverge vers $+\infty$.

Si $\alpha \leq 1$ alors (S_n) diverge vers $+\infty$

2. Avec le même raisonnement que dans la question précédente, comme $\alpha \geq 2$, on a pour $k \in \mathbb{N}^*$: $\frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{k^2}$.

Ainsi pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

Or la suite présente dans le membre de droite converge vers $\frac{\pi^2}{6}$ comme nous l'avons appris dans la partie B, en particulier c'est une suite majorée. Ceci permet d'affirmer que, dans le cas où $\alpha \geq 2$, la suite (S_n) est majorée. De plus, elle est croissante car pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^\alpha} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} = \frac{1}{(n+1)^\alpha} > 0$$

Finalement (S_n) est une suite croissante et majorée, elle converge.

Si $\alpha \geq 2$ alors (S_n) converge

3. (a) On s'inspire de la méthode de la question 1. de la partie A. On fixe $k \in \mathbb{N}^*$, pour $t \in [k, k+1]$, on a : $k^\alpha \leq t^\alpha \leq (k+1)^\alpha$. En effet, la fonction $f : t \mapsto t^\alpha = e^{\alpha \ln(t)}$ est croissante sur $[1, +\infty[$ car $\ln$ et exponentielle sont croissantes sur leurs ensembles de définition respectifs et $\alpha \geq 0$.

En passant à l'inverse, on a :

$$\forall t \in [k, k+1], \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \frac{1}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$$

Il reste à intégrer l'inégalité précédente entre k et $k+1$ par croissance de l'intégrale, il vient :

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \frac{1}{k^\alpha}$$

Ceci en ayant remarqué que l'intégrale d'une constante sur un intervalle de longueur 1 vaut la constante, comme dans la question 1.(b) de la partie A.

(b) On somme les inégalités précédentes, pour k allant de 1 à $n - 1$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha}$$

Pour la première somme, on reconnaît S_n mais il manque le premier terme $\frac{1}{1^\alpha} = 1$. On simplifie la somme centrale à l'aide de la relation de Chasles. Enfin, on oublie le membre de droite de notre double inégalité dont nous n'allons pas avoir besoin :

$$S_n - 1 \leq \int_1^n \frac{1}{t^\alpha} dt \leq S_n - \frac{1}{n^\alpha}$$

L'intégrale se calcule :

$$\int_1^n \frac{1}{t^\alpha} dt = \int_1^n t^{-\alpha} dt = \left[\frac{1}{-\alpha+1} t^{-\alpha+1} \right]_1^n = \frac{1}{-\alpha+1} (n^{-\alpha+1} - 1) = \frac{1}{\alpha-1} (1 - n^{-\alpha+1})$$

En tenant compte de cette simplification et en ajoutant 1 à l'inégalité, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n \leq \frac{1}{\alpha-1} \left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \right) + 1$$

(c) Pour $n \geq 1$, on a $\frac{1}{n^{\alpha-1}} > 0$ donc $1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \leq 1$. D'après l'inégalité précédente, on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n \leq \frac{1}{\alpha-1} + 1$$

Ainsi la suite (S_n) est bornée.

On ne pouvait pas simplement reprendre le résultat de la question précédente pour affirmer que (S_n) est majorée car un majorant ne doit pas dépendre de n .

Avec exactement le même calcul que dans la question 2., on montre que (S_n) est croissante. D'après le théorème de la limite monotone, une suite croissante majorée converge.

$$\text{Si } \alpha \in]1, 2[, (S_n) \text{ converge.}$$

4. En résumé, on connaît complètement la nature des suites (S_n) selon $\alpha \in \mathbb{R}$. On a :

$$\text{la suite de terme général } S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1$$

Avec le cas particulier $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.