1-Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Calculer $S = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n+1}{k+1}$.

2-Soit $n \in \mathbb{N}$, démontrer que $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ est un entier naturel.

1-Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Calculer $S = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n+1}{k+1}$.

Réponse : On commence par faire un changement d'indice en posant $i = k+1$ puis on ajoute les termes manquants pour faire apparaitre une formule du binôme :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=2}^{n} \binom{n+1}{i} \\ &= \left(\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i}\right) - \binom{n+1}{0} - \binom{n+1}{1} - \binom{n+1}{n+1} \\ &= 2^{n+1} - 1 - (n+1) - 1 \\ &= 2^{n+1} - n - 3 \end{aligned}$$

$$\underline{S = 2^{n+1} - n - 3}$$

2-Soit $n \in \mathbb{N}$, démontrer que $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ est un entier naturel.

Réponse : On développe à l'aide de la formule du binôme de Newton :

$$(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\sqrt{3})^k 2^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-\sqrt{3})^k 2^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} ((\sqrt{3})^k + (-1)^k (\sqrt{3})^k) 2^{n-k}$$

• Si k est un entier pair alors $(\sqrt{3})^k + (-1)^k(\sqrt{3})^k$ est un entier positif car $(-1)^k = 1$ et $\sqrt{3}$ élevé à une puissance paire est un nombre entier positif.

• Si k est un entier impair alors $(\sqrt{3})^k + (-1)^k(\sqrt{3})^k = 0$.

On en déduit que $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ est une somme d'entiers naturels, c'est un entier naturel.