L'usage de la calculatrice est interdit. Les raisonnements présentés devront être soigneusement justifiés et détaillés, quelques points seront dédiés à la présentation, l'orthographe et la propreté de votre copie.

En particulier, il vous est demandé de souligner les résultats obtenus. Il n'est pas nécessaire de répondre à l'ensemble des questions pour avoir une bonne note.

Les deux questions précédées du symbole ★ sont très difficiles, vous pourrez les aborder uniquement si vous avez fini le reste.

Échauffement

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Factoriser $a^5 - 2^5$ par $a - 2$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k + 3k^2)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $P_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n+1} 3e^{2^k}$.
4. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} \frac{j}{i}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right)$.
6. Pour x et y deux réels, on considère la proposition :

$$(P) \ : \ (x \neq -1 \ \text{ et } y \neq -1) \Rightarrow x + y + xy \neq -1$$

   (a) Écrire la négation de (P).
   (b) Écrire la contraposée de (P).
   (c) Démontrer que la propriété (P) est vraie.
   (d) L'équivalence est-elle vraie ?

7. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ f(y - f(x)) = 2 - x - y$$

Exercice : La suite de Fibonacci et nombre d'or

La suite de Fibonacci, notée (F_n), est définie par :

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

1. **Lien avec le nombre d'or.**
   (a) Calculer F_n pour $n \in [\![2, 10]\!]$.
   (b) Démontrer par récurrence double que : $\forall n \geq 5,\ F_n \geq n$.
   (c) En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n = +\infty$.
   (d) Expliciter le réel positif φ tel que $\varphi^2 = \varphi + 1$. Ce réel est appelé le nombre d'or.
   (e) Montrer que l'autre solution de cette équation est $-\dfrac{1}{\varphi}$.
   (f) Démontrer par récurrence double la formule de Binet :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\varphi^n - (-\varphi)^{-n}\Big)$$
   (g) Démontrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$.
2. **Premières formules sur la suite de Fibonacci.**
   (a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \varphi^n = F_n\varphi + F_{n-1}$.
   (b) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum\limits_{k=0}^{n} F_{2k+1} = F_{2n+2}$.
   (c) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum\limits_{k=0}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1$.
   (d) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum\limits_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$.
   (e) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum\limits_{k=0}^{n} F_k^2 = F_nF_{n+1}$.
   (f) Démontrer par récurrence double que : $\forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k}$.
3. **Irrationnalité de φ.** Démontrer que $\sqrt{5}$ est irrationnel, en déduire que le nombre d'or est irrationnel.
4. **Un peu de Python.**
   (a) Écrire une fonction $listefib(n)$ qui prend en paramètre un entier naturel n et renvoie la liste des n premiers nombres de Fibonacci. On utilisera pour cela la relation de récurrence double qui définit cette suite.
   (b) Écrire une fonction $fib1(n)$ qui prend en paramètre un entier naturel n et renvoie F_n. On utilisera uniquement deux variables entières dans le corps de la fonction.
   (c) Écrire une fonction $fib2(n)$ qui prend en paramètre un entier naturel n et renvoie F_n en utilisant la formule de Binet. Quel peut-être l'inconvénient de cette dernière fonction ?
5. ★ **Théorème de Zeckendorf.** Montrer que tout entier naturel non nul s'écrit de façon unique comme somme de nombres de Fibonacci non consécutifs.

Problème : Dénombrement de promenades

Ce problème concerne le dénombrement de chemins dans le plan ou dans l'espace. Les trois parties sont indépendantes. On rappelle que pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$, le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ s'interprète comme le nombre de façons de choisir k éléments dans un ensemble à n éléments.

Partie A : Échauffement en dimension 2

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Une souris se trouve initialement à l'origine, O, du repère et souhaite se rendre au point A de coordonnées (a, b) avec $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$. La souris n'a le droit de faire que des déplacements de vecteur $\vec{i}$ ou $\vec{j}$, c'est-à-dire qu'elle va vers la droite ou vers le haut mais qu'elle ne peut pas aller à gauche ou vers le bas.

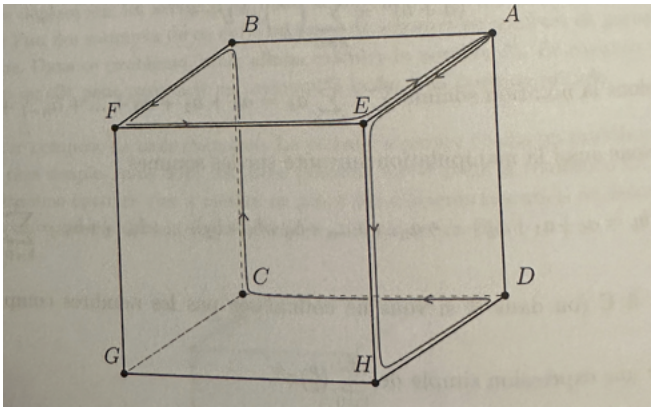
1. À l'aide de schémas, représenter tous les chemins possibles dans le cas particulier où $a = 2$ et $b = 3$.
2. Démontrer que, dans le cas général, le nombre de chemins possibles pour la souris est $\binom{a+b}{a}$.
3. ★ La souris doit aller du point O au point de coordonnées (a, a) avec $a \in \mathbb{N}$ avec la contrainte supplémentaire suivante : à chaque point du trajet de coordonnées (α, β) avec $\alpha \in [\![0, a]\!]$ et $\beta \in [\![0, a]\!]$, on doit avoir $\alpha \geq \beta$. Montrer que le nombre de chemins vérifiant cette condition est : $\dfrac{1}{a+1}\binom{2a}{a}$.

Partie B : Promenades sur un cube

Une souris se déplace sur les arêtes d'un cube de longueur 1. Elle se trouve initialement au sommet A.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on s'intéresse au nombre de chemins de longueur n partant du sommet A et arrivant au sommet A, on note N_n ce nombre.

Le graphique ci-dessous représente un parcours possible pour $n = 8$. Le sommet de départ est A et la souris visite les sommets E, H, D, C, B, F, E, avant de revenir au sommet A.



Pour modéliser ces déplacements, on note :

- v un déplacement vertical, c'est-à-dire suivant les arêtes $[FG]$, $[EH]$, $[AD]$ et $[BC]$.
- h un déplacement horizontal, c'est-à-dire suivant les arêtes $[GH]$, $[FE]$, $[BA]$ et $[CD]$.
- p un déplacement en profondeur, c'est-à-dire suivant les arêtes $[GC]$, $[HD]$, $[FB]$ et $[EA]$.

Avec ces notations, le déplacement illustré dans l'exemple ci-dessus se code *pvphvphp*.

1. Démontrer que si n est un entier naturel impair alors $N_n = 0$.
2. Calculer N_1, N_2, N_3 et N_4 en explicitant le codage correspondant des chemins à l'aide des notations v, h et p.

3. On suppose que n est pair et s'écrit $n = 2q$ avec $q \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$N_n = \sum_{k=0}^{q} \binom{2q}{2k} \sum_{l=0}^{q-k} \binom{2q-2k}{2l}$$

4. Le but de cette question est d'expliciter la somme précédente. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}$.

   (a) Donner une expression simple de $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} x^k$.

   (b) Montrer que :

$$\sum_{i=0}^{p} \binom{2p}{2i} x^{2i} = \frac{(x+1)^{2p} + (-x+1)^{2p}}{2}$$

   (c) En déduire que :

$$\sum_{k=0}^{q} \binom{2q}{2k} \sum_{l=0}^{q-k} \binom{2q-2k}{2l} = \frac{3^{2q}+3}{4}$$

   (d) En déduire une formule simple pour N_n pour $n \in \mathbb{N}^*$ et vérifier sa cohérence avec la question 2.

Partie C : Attention au chat

On considère une grille de taille $(n+1) \times (n+1)$. On repère chaque case par un couple $(i, j) \in [\![0, n]\!]^2$ de la façon détaillée ci-dessous dans le cas particulier où $n = 2$:

(0,2)	(1,2)	(2,2)
(0,1)	(1,1)	(2,1)
(0,0)	(1,0)	(2,0)

Un chat se trouve à la case de coordonnées $(0, 0)$ et une souris se trouve à la case de coordonnées (n, n). Ils font des déplacements simultanément, le chat allant à droite ou en haut de façon équiprobable et la souris à gauche ou en bas de façon équiprobable. Si le chat se trouve sur la même case que la souris, il la mange et l'on note p_n la probabilité que le chat mange la souris. Voici la grille dans le cas où $n = 2$.

		Souris
Chat		

1. Calculer la probabilité que la souris soit mangée dans le cas $n = 2$, c'est-à-dire dans le cas où la grille est de taille 3×3.

   On va résoudre le problème en toute généralité dans le cas d'une grille de taille $(n+1) \times (n+1)$ *où* $n \in \mathbb{N}$.

2. Démontrer que si le chat et la souris se rencontrent, c'est sur une case de coordonnées $(i, n-i)$ où $i \in [\![0, n]\!]$.
3. Soit $i \in [\![0, n]\!]$, démontrer que la probabilité pour que le chat aille sur la case $(i, n-i)$ est $\dfrac{1}{2^n}\binom{n}{i}$.
4. En déduire que $p_n = \dfrac{1}{4^n} \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2$.
5. Démontrer que la probabilité trouvée précédemment peut se simplifier en $\dfrac{1}{4^n}\binom{2n}{n}$.

   On pourra, par exemple, examiner le coefficient en facteur de x^n dans les membres de gauche et de droite de l'expression $(x+1)^{2n} = (x+1)^n (x+1)^n$.