Limites et continuité en un point

1 On considère la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$$

Cette fonction peut-elle être prolongée par continuité en -1 et 1 ?

2 Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction périodique non constante, montrer que f ne possède pas de limite en $+\infty$.

3 ♡★ Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^x}{\lfloor x \rfloor^{\lfloor x \rfloor}}$ définie sur $[1, +\infty[$.

À l'aide de deux suites divergeant vers $+\infty$, montrer que f ne possède pas de limite en $+\infty$.

4 ★ Soient $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Déterminer les limites en 0^+ de :

$$f(x) = \frac{x}{a}\left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor \text{ et } g(x) = \frac{b}{x}\left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor$$

5 ★ Déterminer les limites suivantes lorsque celles-ci existent :

a) $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x}-x$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1}$ d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\ln(x)$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^x$ f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$ h) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ j) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$

k) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$ l) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sin(\ln(x))$

m) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+x^2+5}{5x^3-x^2+2}$ n) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan(5x)}{\sin(x)}$

o) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3x}+2x+7}{e^x+e^{-x}}$ p) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2+1}{\sin^2(x)}$

q) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-\sin(5x)}{\sin(x)+\sin(5x)}$ r) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)-\sin(x)}{x^3}$

s) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(\frac{1}{x})}{e^{\frac{1}{x}}+1}$ t) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{x-\sin(x)}$

u) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\arctan(x)}{x}$ v) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \ln(x)\ln(\ln(x))$

w) $\displaystyle\lim_{x\to 1} x+\lfloor x \rfloor$ x) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x\ln(x))}{x}$

y) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ z) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{\arccos x}$

6 ♡★ Etudier la continuité en tout point des applications :

a) $f : x \mapsto x - \lfloor x \rfloor - (x - \lfloor x \rfloor)^2$

b) $g : x \mapsto (-1)^{\lfloor x \rfloor}\left(x - \lfloor x \rfloor - \dfrac{1}{2}\right)$

c) $h : x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$

d) $i : x \mapsto x^2\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$ sur $\mathbb{R}_+^*$

7 ♡★ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 et en 1 telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x^2) = f(x)$$

Montrer que f est constante.

Théorèmes généraux sur la continuité

8 Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ telle que :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Montrer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$.

9 Que dire de $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ telle que $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{Z}$?

10 Soient $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bornée et $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$. Montrer que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bornées.

11 ♡ Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ telle que :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x) = l'$$

avec $(l, l') \in \mathbb{R}^2$. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

12 ★ Montrer que toute fonction périodique et continue sur $\mathbb{R}$ est bornée.

13 ★ Soient $f : I \to \mathbb{R}^*$ et $g : I \to \mathbb{R}^*$ deux fonctions continues telles que :

$$\forall x \in I,\ |f(x)| = |g(x)|$$

Montrer que $f = g$ ou $f = -g$.

14 ♡★ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et décroissante, montrer que f admet un unique point fixe.

15 ♡★ Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$. On suppose que :

$$\max_{x\in[a,b]}(f(x)) = \max_{x\in[a,b]}(g(x))$$

Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = g(c)$.

16 ♡★ Un automobiliste parcourt 200 kilomètres en 2 heures. Montrer qu'il y a un intervalle d'une heure pendant lequel l'automobiliste a parcouru exactement 100 kilomètres.

17 ★★ Soit $f : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ continue vérifiant $f \circ f = \mathrm{id}$. Déterminer f.

18 ★★ Soit $f \in \mathcal{C}([a,b])$ avec $f(a) \neq f(b)$ et $(u,v) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$uf(a) + vf(b) = (u+v)f(c)$$

19 ♡★★ Soit $f \in \mathcal{C}([0,1])$ telle que $f(0) = f(1)$. Montrer que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \exists \alpha_p \in [0,1],\ f\left(\alpha_p + \frac{1}{p}\right) = f(\alpha_p)$$

Continuité uniforme et lipschitzianité

20 Démontrer l'uniforme continuité de :

a) $f_1 : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{Arcsin}(x) \end{array}$

b) $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt[3]{x} \end{array}$

21 ♡ Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ k-lipschitzienne avec $k \in [0,1[$ et $f(0) = 0$. Soit $a \in \mathbb{R}$ et (u_n) la suite définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

22 ★★ Soient $(f,g) \in \mathcal{C}([0,1])^2$. On pose

$$\varphi : t \mapsto \sup_{x\in[0,1]} (f(x) + tg(x))$$

Montrer que φ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est lipschitzienne.

23 ★★★ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformément continue, montrer qu'il existe $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq A|x| + B$$

24 ★★★ Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère $f \in \mathcal{C}([a,+\infty[)$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$. Montrer que f est uniformément continue sur $[a,+\infty[$.

Défis

D1 ★★ Soient f et g deux fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$ telles que $f \circ g = g \circ f$. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(f(a)) = g(g(a))$. Montrer qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f(b) = g(b)$.

D2 ★★★ Trouver une bijection de $[0,1]$ dans lui-même qui soit discontinue en tout point.

D3 ★★★ Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$. On suppose que tout $y \in \mathbb{R}$ admet au plus 2 antécédents par f. Montrer qu'il existe un réel qui admet un unique antécédent par f.

D4 ★★★ Étudier la continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$