1 Trouver toutes les fonctions de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ solutions de :

$$(E)\ :\ xy'(x)+y(x)=\text{Arctan}(x)$$

Corrigé : Comme $x\in\mathbb{R}_+^*$, l'équation se réécrit :

$$(E)\ :\ y'(x)+\frac{1}{x}y(x)=\frac{\text{Arctan}(x)}{x}$$

L'équation homogène associée est :

$$(EH)\ :\ y'(x)+\frac{1}{x}y(x)=0$$

La fonction $a:x\mapsto\dfrac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et une primitive de a sur $\mathbb{R}_+^*$ est $A:x\mapsto\ln(x)$. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$y(x)=\lambda e^{-\ln(x)}=\frac{\lambda}{x}$$

avec $\lambda\in\mathbb{R}$.

Les solutions de l'équation homogène sont :

$$\boxed{\mathcal{S}_H=\left\{\begin{array}{cccc} y & : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{\lambda}{x}\end{array}\ ,\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}}$$

Pour trouver une solution particulière de (E), on applique la méthode de la variation de la constante en cherchant une solution particulière sous la forme $y_0:x\mapsto\dfrac{\lambda(x)}{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ avec λ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction y_0 est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ y_0'(x)=\frac{\lambda'(x)x-\lambda(x)}{x^2}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
y_0\text{ solution de }(E)\quad &\Leftrightarrow\quad \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ y_0'(x)+\frac{1}{x}y_0(x)=\frac{\text{Arctan}(x)}{x}\\
&\Leftrightarrow\quad \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \frac{\lambda'(x)x-\lambda(x)}{x^2}+\frac{\lambda(x)}{x^2}=\frac{\text{Arctan}(x)}{x}\\
&\Leftrightarrow\quad \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \frac{\lambda'(x)}{x}=\frac{\text{Arctan}(x)}{x}\\
&\Leftrightarrow\quad \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \lambda'(x)=\text{Arctan}(x)
\end{aligned}$$

Il reste à donner une primitive de la fonction Arctan, pour cela on utilise une intégration par parties en posant :

$$\begin{array}{rclcrcl}
u'(x) & = & 1 & & u(x) & = & x\\
v(x) & = & \text{Arctan}(x) & & v'(x) & = & \dfrac{1}{x^2+1}
\end{array}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\int\text{Arctan}(x)dx=x\text{Arctan}(x)-\int\frac{x}{x^2+1}dx=x\text{Arctan}(x)-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

Ainsi on peut choisir $\lambda(x)=x\text{Arctan}(x)-\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$ et par suite :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ y_0(x)=\text{Arctan}(x)-\frac{1}{2x}\ln(x^2+1)$$

Finalement l'ensemble des solutions de (E) :

$$\boxed{\mathcal{S}_H=\left\{\begin{array}{ccccc} y & : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{\lambda}{x}+\text{Arctan}(x)-\dfrac{1}{2x}\ln(x^2+1)\end{array}\ ,\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}}$$

2 ★ Trouver toutes les fonctions de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ solutions de :

$$(E)\ :\ x(1+\ln^2(x))y'(x)+2\ln(x)y(x)=1$$

Corrigé : • On applique la méthode vue en cours et rédigée en détail dans l'exercice précédent, allons un peu plus vite ici.

Pour $x>0$, l'équation se réécrit :

$$(E)\ :\ y'(x)+\frac{2\ln(x)}{x(1+\ln^2(x))}y(x)=\frac{1}{x(1+\ln^2(x))}$$

• Ici $a : x\mapsto \dfrac{2\ln(x)}{x(1+\ln^2(x))}$ est de la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u : x\mapsto 1+\ln^2(x)$. Une primitive de a sur $\mathbb{R}_+^*$ est donc $A\ :\ x\mapsto \ln(1+\ln^2(x))$. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions :

$$y\ :\ x\mapsto \lambda e^{-\ln(1+\ln^2(x))}=\frac{\lambda}{1+\ln^2(x)}\quad \text{avec } \lambda\in\mathbb{R}$$

• On cherche une solution avec la méthode de la variation de la constante, on trouve :

$$\lambda'(x)=\frac{1}{x(1+\ln^2(x))}e^{\ln(1+\ln^2(x))}=\frac{1}{x}$$

On peut choisir $\lambda\ :\ x\mapsto\ln(x)$.

Une solution particulière est $y_0\ :\ x\mapsto\dfrac{\ln(x)}{1+\ln^2(x)}$.

Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions :

$$\boxed{x\mapsto\frac{\ln(x)}{1+\ln^2(x)}+\frac{\lambda}{1+\ln^2(x)}\ \text{avec } \lambda\in\mathbb{R}}$$

3 ★★ Trouver toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ solutions de :

$$(E)\ :\ (1-x^2)y'(x)+xy(x)=x$$

Corrigé : On se place sur l'intervalle I qui est égal à $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$ ou $]1,+\infty[$. Sur I la fonction $x\mapsto 1-x^2$ ne s'annule pas donc l'équation différentielle (E) est équivalente à :

$$(E')\ :\ y'(x)+\frac{x}{1-x^2}y(x)=\frac{x}{1-x^2}$$

• On commence par résoudre l'équation homogène. On a $a\ :\ x\mapsto\dfrac{x}{1-x^2}$, on peut choisir comme primitive sur I : $A\ :\ x\mapsto -\dfrac{1}{2}\ln(|1-x^2|)$. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions :

$$x\mapsto\lambda e^{-(-\frac{1}{2}\ln(|1-x^2|))}=\lambda\sqrt{|1-x^2|}\ \text{avec } \lambda\in\mathbb{R}$$

• On remarque que la fonction constante égale à 1 est une solution évidente de (E). Finalement les solutions de (E) sur I sont les fonctions :

$$x\mapsto\lambda\sqrt{|1-x^2|}+1\ \text{avec } \lambda\in\mathbb{R}$$

On peut d'ailleurs préciser la forme des solutions selon l'intervalle :

► Sur $]-\infty,-1[$, on a : $x\mapsto\lambda\sqrt{x^2-1}+1$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$.

► Sur $]-1,1[$, on a : $x\mapsto\lambda\sqrt{1-x^2}+1$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$.

► Sur $]1,+\infty[$, on a : $x \mapsto \lambda\sqrt{x^2-1}+1$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

• Pour trouver d'éventuelles solutions définies sur $\mathbb{R}$, on procède par analyse-synthèse.

Analyse. Soit f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ solution de (E). En évaluant l'équation en $x=-1$ puis en $x=1$, on trouve $f(-1)=1$ et $f(1)=1$. D'autre part, f étant solution de (E) sur $\mathbb{R}$, c'est en particulier une solution de (E) sur $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$ et $]1,+\infty[$. D'après l'étude précédente, on sait que f s'écrit :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} \lambda_1\sqrt{x^2-1}+1 & \text{si } x<-1 \\ 1 & \text{si } x=-1 \\ \lambda_2\sqrt{1-x^2} & \text{si } -1<x<1 \\ 1 & \text{si } x=1 \\ \lambda_3\sqrt{x^2-1} & \text{si } x>1 \end{cases}$$

avec $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.

La fonction f étant dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est en particulier continue sur $\mathbb{R}$. La continuité en 1 et -1 se traduit par :

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1) \text{ et } \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$$

ceci est vérifié quelque soient les constantes λ_1, λ_2 et λ_3.

Examinons la dérivablité. La fonction f est clairement dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, il reste à étudier la dérivabilité en 1 et -1. On doit avoir :

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)$$

En tenant compte des différentes expressions de f selon l'intervalle cela donne :

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\lambda_2\sqrt{1-x^2}}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\lambda_3\sqrt{x^2-1}}{x-1} = f'(1)$$

Détaillons ces limites. Pour $x \in]-1,1[$, on a :

$$\frac{\lambda_2\sqrt{1-x^2}}{x-1} = \frac{\lambda_2\sqrt{(1-x)(1+x)}}{-\sqrt{(1-x)^2}} = -\lambda_2\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}$$

On a utilise $\sqrt{(1-x)^2} = |1-x| = 1-x$ car $x \in]-1,1[$. Quand x tend vers 1 ce quotient tend vers $\pm\infty$ sauf si $\lambda_2=0$.
De même pour $x \in]1,+\infty[$, on a :

$$\frac{\lambda_3\sqrt{x^2-1}}{x-1} = \frac{\lambda_2\sqrt{(x-1)(x+1)}}{\sqrt{(x-1)^2}} = \lambda_3\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x-1}}$$

Quand x tend vers 1 ce quotient tend vers $\pm\infty$ sauf si $\lambda_3=0$.

L'étude en $x=-1$ est similaire et nous donne les conditions $\lambda_1=\lambda_2=0$. Finalement la condition f dérivable sur $\mathbb{R}$ impose $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$, c'est-à-dire que f est la fonction constante égale à 1.

Synthèse La fonction constante égale à 1 est clairement une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{x \mapsto 1 \text{ est la seule solution de } (E) \text{ définie sur } \mathbb{R}}$$

3 Résoudre sur $\mathbb{R}$: $(E)\ :\ y''+y=\text{sh}(x)$.

Corrigé : • L'équation caractéristique s'écrit $R=X^2+1=0$, les solutions de cette équation sont i et $-i$, ainsi les solutions de l'équation homogène sont :

$$x \mapsto A\cos(x)+B\sin(x),\ (A,B) \in \mathbb{R}^2$$

• La fonction $\frac{1}{2}$sh est une solution particulière évidente. Les fonctions solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont :

$$\boxed{x \mapsto A\cos(x) + B\sin(x) + \frac{1}{2}\mathrm{sh}(x)}$$

4 ★ Résoudre sur $\mathbb{R}$: $(E)\ :\ y'' + y = 2\cos^2(x)$.

Corrigé : • L'équation caractéristique s'écrit $R = X^2 + 1 = 0$, les solutions de cette équation sont i et $-i$, ainsi les solutions de l'équation homogène sont :

$$x \mapsto A\cos(x) + B\sin(x),\ (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

• Pour trouver une solution particulière, il s'agit de remarquer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2\cos^2(x) = \cos(2x)+1$. On pose :

$$(E_1)\ :\ y'' + y = 1$$
$$(E_2)\ :\ y'' + y = \cos(2x)$$

On va trouver une solution particulière de (E_1) et une solution particulière de (E_2) puis les sommer en utilisant le principe de superposition pour avoir une solution particulière de (E).

La fonction constante égale à 1 est une solution particulière évidente de (E_1). Pour (E_2), on va trouver une solution particulière de $(E_2')\ :\ y'' + y = e^{2ix}$ puis en prendre la partie réelle. On cherche une solution particulière de (E_2') sous la forme $y_0 : x \mapsto \gamma e^{2ix}$ avec $\gamma \in \mathbb{C}$ car $2i$ n'est pas racine de R. La fonction y_0 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$y_0' : x \mapsto 2i\gamma e^{2ix}$$
$$y_0'' : x \mapsto -4\gamma e^{2ix}$$

On a :

$$\begin{aligned} y_0 \text{ solution de } (E_2') &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ y_0''(x) + y_0(x) = e^{2ix} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ -4\gamma e^{2ix} + \gamma e^{2ix} = e^{2ix} \\ &\Leftrightarrow -3\gamma = 1 \\ &\Leftrightarrow \gamma = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Une solution particulière de (E_2') est $x \mapsto -\frac{1}{3}e^{2ix}$, sa partie réelle est $x \mapsto -\frac{1}{3}\cos(2x)$.

Finalement les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) sont les fonctions :

$$\boxed{x \mapsto A\cos(x) + B\sin(x) + 1 - \frac{1}{3}\cos(2x)}$$

5 ★★★ Déterminer les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$$

Corrigé : **Analyse.** Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant la relation. D'une part, on peut utiliser la relation en $\frac{1}{x}$ pour obtenir :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$$

D'autre part, la fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ car pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = f\Big(\dfrac{1}{x}\Big)$. On dérive :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f''(x) = -\frac{1}{x^2} f'\Big(\frac{1}{x}\Big) = -\frac{1}{x^2} f(x)$$

Ainsi la fonction f vérifie l'équation différentielle $(E)\ :\ y'' + \dfrac{1}{x^2} y = 0$. On reconnait une équation différentielle linéaire d'ordre 2 mais les coefficients ne sont pas constants. On pose : $g : t \mapsto f(e^t)$ définie sur $\mathbb{R}$. La fonction f étant deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que g est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$. De façon équivalente, on a : $f : x \mapsto g(\ln(x))$ et en dérivant :

$$f' : x \mapsto \frac{1}{x} g'(\ln(x))$$

$$f'' : x \mapsto -\frac{1}{x^2} g'(\ln(x)) + \frac{1}{x^2} g''(\ln(x))$$

On a :

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f''(x) + \frac{1}{x^2} f(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ -\frac{1}{x^2} g'(\ln(x)) + \frac{1}{x^2} g''(\ln(x)) + \frac{1}{x^2} g(\ln(x)) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ -g'(\ln(x)) + g''(\ln(x)) + g(\ln(x)) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R},\ g''(t) - g'(t) + g(t) = 0
\end{aligned}$$

On sait résoudre cette dernière équation portant sur g. L'équation caractéristique s'écrit $R = X^2 - X + 1$, elle a pour solutions : $\dfrac{1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. On en déduit que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = e^{\frac{1}{2}t}\Big(A\cos\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}t\Big) + B\sin\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}t\Big)\Big) \text{ avec } (A,B) \in \mathbb{R}^2$$

On trouve ainsi la fonction f :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = e^{\frac{1}{2}\ln(x)}\Big(A\cos\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\Big) + B\sin\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\Big)\Big) \text{ avec } (A,B) \in \mathbb{R}^2$$

En simplifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \sqrt{x}\Big(A\cos\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\Big) + B\sin\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\Big)\Big) \text{ avec } (A,B) \in \mathbb{R}^2$$

Synthèse. Les fonctions f définies sur $\mathbb{R}_+^*$ avec l'expression ci-dessus sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\Big(A\cos\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\Big) + B\sin\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\Big)\Big) + \sqrt{x}\Big(-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{A}{x}\sin\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\Big) + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{B}{x}\cos\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\Big)\Big)$$

En simplifiant :

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\Big(A\cos\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\Big) + B\sin\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\Big)\Big) + \frac{1}{2\sqrt{x}}\Big(-A\sqrt{3}\sin\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\Big) + \sqrt{3}B\cos\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\Big)\Big)$$

C'est-à-dire :

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\Big((A + B\sqrt{3})\cos\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\Big) + (B - A\sqrt{3})\sin\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\Big)\Big)$$

D'autre part pour $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f\Big(\frac{1}{x}\Big) = \sqrt{\frac{1}{x}}\Big(A\cos\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big) + B\sin\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big)\Big) = \frac{1}{\sqrt{x}}\Big(A\cos\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\Big) - B\sin\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\Big)\Big)$$

En examinant les deux expressions, on en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = f\Big(\frac{1}{x}\Big) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{A + B\sqrt{3}}{2} = A \\ \dfrac{B - A\sqrt{3}}{2} = -B \end{cases} \Leftrightarrow A = B\sqrt{3}$$

Les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation sont les fonctions :

$$\boxed{x \mapsto \sqrt{x}\Big(B\sqrt{3}\cos\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\Big) + B\sin\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\Big)\Big) \text{ avec } B \in \mathbb{R}}$$

Remarque. Lors de la synthèse, nous avons fait l'identification suivante pour $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$:

$$a\cos(x) + b\sin(x) = c\cos(x) + d\sin(x) \Rightarrow a = c \text{ et } b = d$$

C'est valable car en évaluant en $x = 2\pi$, on trouve $a = c$ puis en évaluant en $\frac{\pi}{2}$, on trouve $b = d$.

6	★★ Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation $(E)\ :\ y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{x}$.

Corrigé : Nous avons à faire à une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, cependant le second membre n'est pas de la forme polynôme-exponentielle qui est le seul cas étudié en cours.

L'équation (E) est équivalente à $e^x(y'' + 2y' + y) = \dfrac{1}{x}$. Remarquons que si l'on pose $f : x \mapsto e^x y(x)$ avec y deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$f' : x \mapsto e^x y(x) + e^x y'(x) = e^x(y(x) + y'(x))$$
$$f'' : x \mapsto e^x y(x) + e^x y'(x) + e^x y'(x) + e^x y''(x) = e^x(y''(x) + 2y'(x) + y(x))$$

Ayant remarqué ceci, on a :

$$\begin{aligned} y \text{ vérifie } (E) \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f''(x) = \frac{1}{x} \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \ln(x) + A,\ \text{avec } A \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = x\ln(x) - x + B + Ax \end{aligned}$$

En notant $C = B - 1$, on a bien C qui décrit $\mathbb{R}$ quand B décrit $\mathbb{R}$ et l'ensemble des solutions est :

$$\boxed{x \mapsto (x\ln(x) + Cx + B)e^{-x},\ (B,C) \in \mathbb{R}^2}$$

7	★★★ Trouver toutes les solutions à : $$(E)\ :\ \begin{cases} y'' - 2y' + 2y = xe^x\cos(x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Corrigé : • L'équation caractéristique est $R = X^2 - 2X + 2 = 0$ qui a pour solutions $1 \pm i$. Les solutions de l'équation homogène sont :

$$x \mapsto e^x(A\cos(x) + B\sin(x)) \text{ avec } (A,B) \in \mathbb{R}^2$$

• Le second membre est la partie réelle de $xe^xe^{ix} = xe^{(1+i)x}$. Nous allons trouver une solution particulière de :

$$(E')\ :\ y'' - 2y' + 2y = xe^{(1+i)x}$$

$1 + i$ est racine de R mais n'est pas racine de R', nous cherchons une solution particulière sous la forme :

$$y_0 : x \mapsto (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)e^{(1+i)x} \text{ où } (\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{C}^3$$

On dérive y_0 deux fois et on remplace dans l'équation (E'), nous obtenons $\alpha = -\dfrac{1}{4}i$, $\beta = \dfrac{1}{4}$ et nous n'avons pas de condition sur γ. Une solution de (E') sur $\mathbb{R}$ est :

$$x \mapsto \Big(-\frac{1}{4}ix^2 + \frac{1}{4}x\Big)e^{(1+i)x}$$

La partie réelle de y_0 est :

$$x \mapsto \frac{x}{4}\cos(x)e^x + \frac{x^2}{4}\sin(x)e^x$$

Les solutions de l'équation initiale sont les fonctions :

$$x \mapsto e^x(A\cos(x) + B\sin(x)) + \frac{x}{4}\cos(x)e^x + \frac{x^2}{4}\sin(x)e^x \text{ avec } (A,B) \in \mathbb{R}^2$$

Avec les conditions initiales, on trouve $A = 0$ et $B = -\dfrac{1}{4}$.

$$\boxed{\text{La solution du problème est } x \mapsto \frac{e^x}{4}\Big(x\cos(x) + (x^2-1)\sin(x)\Big)}$$