1-À l'aide de la décomposition en facteurs premiers, donner le pgcd et le ppcm de 300 et 126. Donner tous les diviseurs positifs de 126.

2-Soient $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et p un nombre premier. Démontrer que $\nu_p(a+b) \geq \min(\nu_p(a), \nu_p(b))$ et trouver un exemple montrant qu'il n'y a pas égalité en général.

3-Soit $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ premiers entre eux. Montrer que $\mathbb{U}_a \cap \mathbb{U}_b = \{1\}$.

4-Démontrer que $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{5}}$ est irrationnel.

5-★ Montrer que pour tout $n \geq 2$, $n^4 + 4^n$ n'est pas premier.

1-À l'aide de la décomposition en facteurs premiers, donner le pgcd et le ppcm de 300 et 126. Donner tous les diviseurs positifs de 126.

Réponse : On a :

$$300 = 2^2 \times 3 \times 5^2 \text{ et } 126 = 2 \times 3^2 \times 7$$

Ainsi :

$$\text{pgcd}(300, 126) = 2 \times 3 = 6 \text{ et } \text{ppcm}(300, 126) = 2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 = 6300$$

Les diviseurs de 126 sont de la forme $2^\alpha \times 3^\beta \times 7^\gamma$ avec $\alpha \in [\![0, 1]\!]$, $\beta \in [\![0, 2]\!]$ et $\gamma \in [\![0, 1]\!]$. On trouve :

$$1, 7, 3, 21, 9, 63, 2, 14, 6, 42, 18, 126$$

2-Soient $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et p un nombre premier. Démontrer que $\nu_p(a+b) \geq \min(\nu_p(a), \nu_p(b))$ et trouver un exemple montrant qu'il n'y a pas égalité en général.

Réponse : Soit $r = \min(\nu_p(a), \nu_p(b))$, on a $r \leq \nu_p(a)$ donc $p^r | a$ et $r \leq \nu_p(b)$ donc $p^r | b$. Ce qui démontre que $p^r | a+b$. Par définition :

$$\nu_p(a+b) = \max\{k \in \mathbb{N},\ p^k | a+b\}$$

Ainsi $r \leq \nu_p(a+b)$, ce qu'il fallait démontrer.

Prenons $a = 4$ et $b = 4$, on a $\nu_2(4) = 2$ d'où $\min(\nu_p(a), \nu_p(b)) = 2$. Pourtant $\nu_2(a+b) = \nu_2(8) = 3$, il n'y a pas égalité en général.

3-Soit $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ premiers entre eux. Montrer que $\mathbb{U}_a \cap \mathbb{U}_b = \{1\}$.

Réponse : Soit $z \in \mathbb{U}_a \cap \mathbb{U}_b$, on a $z^a = 1$ et $z^b = 1$. D'après le théorème de Bézout :

$$\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2,\ au + bv = 1$$

Ainsi $z = z^{au+bv} = (z^a)^u \times (z^b)^v = 1^u \times 1^v = 1$.
On a bien : $\mathbb{U}_a \cap \mathbb{U}_b = \{1\}$.

4-Démontrer que $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{5}}$ est irrationnel.

Réponse : Par l'absurde, on suppose que $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{5}} = \frac{a}{b}$ avec $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
On élève à la puissance 5 :

$$\frac{4}{3} = \frac{a^5}{b^5} \Leftrightarrow 4b^5 = 3a^5$$

On regarde la 3-valuation :

$$\nu_3(4b^5) = \nu_3(3a^5) \Leftrightarrow \nu_3(b^5) = 1 + \nu_3(a^5) \Leftrightarrow 5\nu_3(b) = 1 + 5\nu_3(a)$$

Cette dernière égalité est absurde puisque modulo 5, elle donne : $0 \equiv 1$ [5].

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{5}} \text{ est irrationnel}$$

5-Montrer que pour tout $n \geq 2$, $n^4 + 4^n$ n'est pas premier.

Réponse : • Si n est pair, le nombre proposé est pair et supérieur strictement à 2 : il n'est pas premier.

• Si n est impair, on a $n = 2k + 1$ donc :

$$n^4 + 4^{2k+1} = n^4 + 4 \times (2^k)^4$$

On utilise la factorisation de Sophie Germain :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2,\ a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab)$$

avec ici $a = n$ et $b = 2^k$.
Les facteurs obtenus sont bien non triviaux donc n est composé.