

A-Préliminaires

Cette partie est exclusivement du cours, il s'agit d'énumérer les différentes propriétés de la fonction arctangente.

1. La restriction de la fonction tangente à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ est continue et strictement croissante. On a les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty.$$

Ainsi d'après le théorème de la bijection, la fonction tangente admet une bijection réciproque définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on note cette bijection réciproque : Arctan.

2. On a par construction :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\text{Arctan}(x)) = x \quad \text{et} \quad \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \text{Arctan}(\tan(x)) = x$$

La fonction Arctan est continue, strictement croissante et impaire sur $\mathbb{R}$ puisque la fonction tangente est également continue, strictement croissante et impaire sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

La dérivée de la fonction tangente est la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par : $x \mapsto 1 + \tan^2(x)$, cette dérivée ne s'annule pas. Ceci permet de dire que la fonction Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{Arctan}'(x) = \frac{1}{\tan'(\text{Arctan}(x))} = \frac{1}{1 + x^2}$$

On a les limites suivantes qui se déduisent des limites de la fonction tangente données précédemment :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{Arctan}(x) = -\frac{\pi}{2}^+ \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}^-$$

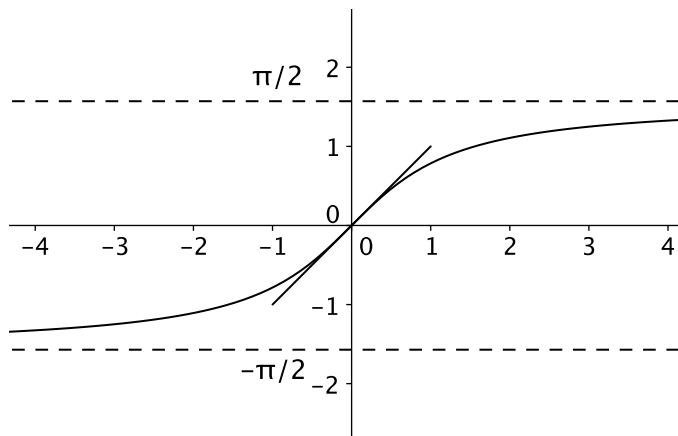
Ces limites impliquent que la droite d'équation $y = -\frac{\pi}{2}$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $-\infty$ et que la droite d'équation $y = \frac{\pi}{2}$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

On a les valeurs remarquables suivantes qui se déduisent des valeurs remarquables prises par la fonction tangente :

$$\text{Arctan}(0) = 0, \quad \text{Arctan}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}, \quad \text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \text{Arctan}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$

Par imparité, on trouve les valeurs de l'arc tangente en $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, -1 et $-\sqrt{3}$.

On a le graphique suivant :



C-Les nombres de Fibonacci et l'arctangente

1. Démontrons la propriété annoncée par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

$$\mathcal{H}_n : F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2} = (-1)^n$$

• **Initialisation.** Pour $n = 0$, on a bien : $F_1^2 - F_0 F_2 = 1 = (-1)^0$.

• **Hérédité.** Fixons $n \in \mathbb{N}$ et supposons $\mathcal{H}_n$ vraie, on a :

$$F_{n+2}^2 - F_{n+1} F_{n+3} = F_{n+2}^2 - F_{n+1} (F_{n+1} + F_{n+2}) = F_{n+2} (F_{n+2} - F_{n+1}) - F_{n+1}^2 = F_{n+2} F_n - F_{n+1}^2 = -(-1)^n = (-1)^{n+1}$$

Ce qui démontre que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vérifiée et termine la récurrence.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2} = (-1)^n}$$

2. Soit $n \geq 1$: cette condition va permettre de garantir que les dénominateurs mis en jeu ne sont pas nuls puisque $F_n > 0$ dès que $n \geq 1$.

• Étant donné que $n \geq 1$, on a : $0 \leq \frac{1}{F_{2n}} \leq 1$. Par croissance de la fonction Arctan, cela permet d'affirmer que

$$0 \leq \text{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n}}\right) \leq \frac{\pi}{4}.$$

On a également : $0 \leq \text{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right) < 1$ et $0 \leq \text{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right) < 1$, toujours en utilisant la stricte croissance de la fonction Arctan, on en déduit que :

$$0 \leq \text{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right) < \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Les deux nombres $\text{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n}}\right)$ et $\text{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right)$ sont compris dans l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; pour démontrer qu'ils sont égaux, il suffit de démontrer qu'ils ont la même tangente.

• D'une part :

$$\tan\left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n}}\right)\right) = \frac{1}{F_{2n}}$$

D'autre part :

$$\tan\left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right)\right) = \frac{\frac{1}{F_{2n+1}} + \frac{1}{F_{2n+2}}}{1 - \frac{1}{F_{2n+1}F_{2n+2}}} = \frac{F_{2n+1} + F_{2n+2}}{F_{2n+2}F_{2n+1} - 1}$$

On peut simplifier cette expression puisqu'elle est égale à :

$$\begin{aligned} \frac{(F_{2n+1} + F_{2n+2})F_{2n}}{(F_{2n+2}F_{2n+1} - 1)F_{2n}} &= \frac{F_{2n+1}F_n + F_{2n+2}F_{2n}}{(F_{2n+2}F_{2n+1} - 1)F_{2n}} \\ &= \frac{F_{2n+1}F_n + F_{2n+1}^2 - (-1)^{2n}}{(F_{2n+2}F_{2n+1} - 1)F_{2n}} && \text{en utilisant l'identité de Cassini} \\ &= \frac{F_{2n+1}(F_n + F_{2n+1}) - 1}{(F_{2n+2}F_{2n+1} - 1)F_{2n}} \\ &= \frac{F_{2n+1}F_{2n+2} - 1}{(F_{2n+2}F_{2n+1} - 1)F_{2n}} \\ &= \frac{1}{F_{2n}} \end{aligned}$$

Ce qui démontre bien la formule attendue :

$$\forall n \geq 1, \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n}}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right)$$

3. (a) En appliquant la formule précédente avec $n = 1$, il vient :

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_2}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_3}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_4}\right) \Leftrightarrow \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{1}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right)$$

Ce qui démontre que :

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right) \quad (1)$$

- (b) En utilisant la formule précédente avec $n = 2$, il vient :

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_4}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_5}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_6}\right) \Leftrightarrow \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right)$$

En remplaçant dans l'égalité (1), il vient :

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right) \quad (2)$$

- (c) De même, en appliquant la formule précédente pour $n = 3$, on obtient :

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{13}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{21}\right)$$

En remplaçant dans l'égalité (2), il vient :

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{13}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{21}\right)$$

Vous aurez compris comment poursuivre la généralisation de ces formules. Elles peuvent être utilisées pour le calcul de décimales de π .

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, en utilisant la relation démontrée à la question 2., on a :

$$\begin{aligned} u_n &= \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right) + \sum_{k=0}^n \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2k+1}}\right) \\ &= \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+3}}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+4}}\right) + \sum_{k=0}^n \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2k+1}}\right) \\ &= \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+4}}\right) + \sum_{k=0}^{n+1} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2k+1}}\right) \\ &= u_{n+1} \end{aligned}$$

$$(u_n) \text{ est constante}$$

(b) La suite (u_n) est constante égale à $u_0 = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_2}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_1}\right) = 2\operatorname{Arctan}(1) = \frac{\pi}{2}$.

Ce qui démontre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{\pi}{2}$. D'autre part, nous avons démontré que :

$$\forall n \geq 0, u_n - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right) = \sum_{k=0}^n \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2k+1}}\right) \quad (\star)$$

• Grâce à la question 1.(b) de la partie A, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{2n+2} = +\infty$. Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{F_{2n+2}} = 0$, par continuité de la fonction Arctan , on en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right) = \operatorname{Arctan}(0) = 0$$

• En passant à la limite dans la relation $(\star)$, on en déduit que :

$$\frac{\pi}{2} - 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2k+1}}\right)$$

Ce qui démontre la relation annoncée :

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2k+1}}\right)$$

D-Entracte

1. (a) Cette inégalité peut se démontrer de façon classique par étude de fonctions. Cependant le plus direct ici est d'utiliser la question 3.(c) de la partie B avec $n = 0$ qui est pair. Nous obtenons :

$$\forall x \geq 0, S_1(x) \leq \text{Arctan}(x) \leq S_0(x)$$

En explicitant les expressions de $S_0(x)$ et $S_1(x)$ cela donne exactement l'inégalité voulue :

$$\forall x \geq 0, x - \frac{1}{3}x^3 \leq \text{Arctan}(x) \leq x$$

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On utilise l'inégalité précédente avec $x = \frac{k}{n^2}$ puis on somme les inégalités obtenues pour k allant de 0 à n :

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n^2} - \frac{1}{3} \frac{k^3}{n^6} \right) \leq \sum_{k=0}^n \text{Arctan}\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq \sum_{k=0}^n \frac{k}{n^2}$$

Par linéarité de la somme et d'après les formules vues en cours sur les sommes classiques, on obtient :

$$\frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{n^2(n+1)^2}{12n^6} \leq \sum_{k=0}^n \text{Arctan}\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{n(n+1)}{2n^2}$$

D'après le théorème d'encadrement et en utilisant le fait que la limite en $+\infty$ d'une fonction rationnelle est celle du quotient des termes de plus haut degré, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \text{Arctan}\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$$

2. On effectue une intégration par parties, les fonctions mises en jeu étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$:

$$\int \text{Arctan}(x) dx = \int 1 \times \text{Arctan}(x) dx = [x \text{Arctan}(x)] - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \text{Arctan}(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$$

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction Arctan est :

$$x \mapsto x \text{Arctan}(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$$

3. (a) Soit $f : x \mapsto \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(x^3)$ définie sur $\mathbb{R}$. La fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions strictement croissantes sur $\mathbb{R}$. De plus $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\pi$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pi$. Ainsi f réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $] -\pi, \pi[$ et on peut affirmer que l'équation $f(x) = \frac{3\pi}{4}$ admet une unique solution. De plus cette solution est positive car $f(0) = 0$.
- (b) Soit x une solution de l'équation, en prenant la fonction tangente, on obtient :

$$\tan(\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(x^3)) = -1 \Leftrightarrow \frac{x+x^3}{1-x^4} = -1$$

- (c) Il reste à terminer la résolution, on a : $\frac{x+x^3}{1-x^4} = \frac{x(1+x^2)}{(1-x^2)(1+x^2)} = \frac{x}{1-x^2}$. On obtient donc $\frac{x}{1-x^2} = -1$, ce qui donne l'équation : $x^2 - x - 1 = 0$. Cette équation possède deux solutions :

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

On garde la solution positive :

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}$$

F-Dérivons l'arctangente

1. (a) La fonction f est dérivable n fois sur $\mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'après la remarque de l'énoncé et nous avons avec les formules de dérivation usuelles :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \quad \text{et} \quad f^{(3)}(x) = 2 \frac{3x^2-1}{(1+x^2)^3}$$

- (b) i. Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathcal{H}_n : f^{(n)} : x \mapsto \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^n} \text{ avec } P_n \text{ une fonction polynomiale}$$

Initialisation. On a : $f' : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ ce qui démontre que $\mathcal{H}_1$ est vraie avec $P_1 = 1$.

Hérédité. On suppose $\mathcal{H}_n$ vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On a donc $f^{(n)} : x \mapsto \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$. D'après les formules de dérivation usuelles, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n+1)}(x) = \frac{P'_n(x)(1+x^2)^n - P_n(x)2nx(1+x^2)^{n-1}}{(1+x^2)^{2n}} = \frac{(1+x^2)P'_n(x) - 2nxP_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$$

Nous avons :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P_{n+1}(x) = (1+x^2)P'_n(x) - 2nxP_n(x)$$

Il est clair que P_{n+1} est une fonction polynomiale, ce qui démontre $\mathcal{H}_{n+1}$ et termine la récurrence.

- ii. Lors de la récurrence précédente, nous avons mis en évidence la formule :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P_{n+1}(x) = (1+x^2)P'_n(x) - 2nxP_n(x)$$

- iii. Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathcal{H}_n : \exists Q_n \text{ une fonction polynomiale avec } \deg(Q_n) \leq n-2, \forall x \in \mathbb{R}, P_n(x) = (-1)^{n-1}n!x^{n-1} + Q_n(x)$$

Initialisation. La formule est correcte pour $n = 1$ en prenant $Q_1 = 0$ étant donné que $P_1 = 1$.

Hérédité. On suppose le résultat vrai au rang $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P_n(x) = (-1)^{n-1}n!x^{n-1} + Q_n(x)$$

et en dérivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P'_n(x) = (-1)^{n-1}n!(n-1)x^{n-2} + Q'_n(x)$$

On remarque que si $n = 1$, le coefficient devant x^{n-2} est nul ce qui ne pose donc pas de problème d'écriture.

Or d'après la relation de la question précédente, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
 P_{n+1}(x) &= (1+x^2)P'_n(x) - 2nxP_n(x) \\
 &= (1+x^2)((-1)^{n-1}n!(n-1)x^{n-2} + Q'_n(x)) - 2nx((-1)^{n-1}n!x^{n-1} + Q_n(x)) \\
 &= (-1)^{n-1}n!x^n((n-1) - 2n) + \underbrace{((-1)^{n-1}n!(n-1)x^{n-2} + (1+x^2)Q'_n(x) - 2nxQ_n(x))}_{=Q_{n+1}(x)} \\
 &= (-1)^n(n+1)!x^n + Q_{n+1}(x)
 \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, on a $\deg(Q_n) \leq n-2$ ainsi $\deg(Q_{n+1}) \leq n-1$ comme voulu.

Ce qui démontre que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie et termine la récurrence. Avec l'écriture proposée, on en déduit que :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\deg(P_n) = n-1$ et le coefficient dominant de P_n est $(-1)^{n-1}n!$

(c) Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété suivante :

$$\mathcal{H}_n : \forall x \in \mathbb{R}, (1+x^2)f^{(n+2)}(x) + 2x(n+1)f^{(n+1)}(x) + n(n+1)f^{(n)}(x) = 0$$

• **Initialisation.** Pour $n = 1$, il s'agit de démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(1+x^2)f^{(3)}(x) + 6xf^{(2)}(x) + 2f'(x) = 0$$

Avec les valeurs de f' , f'' et $f^{(3)}$ obtenues à la question 1.(a), ceci est immédiat à vérifier.

• **Hérédité.** On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on suppose que la formule au rang n est vérifiée. Dérivons cette expression sachant que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, cela donne pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$2xf^{(n+2)}(x) + (1+x^2)f^{(n+3)}(x) + 2(n+1)f^{(n+1)}(x) + 2x(n+1)f^{(n+2)}(x) + n(n+1)f^{(n+1)}(x) = 0$$

Ce qui donne bien en simplifiant et en regroupant les termes :

$$(1+x^2)f^{(n+3)}(x) + 2x(n+2)f^{(n+2)}(x) + (n+1)(n+2)f^{(n+1)}(x) = 0$$

C'est exactement la formule au rang $n+1$. Ce qui termine la récurrence.

$$\forall x \in \mathbb{R}, (1+x^2)f^{(n+2)}(x) + 2x(n+1)f^{(n+1)}(x) + n(n+1)f^{(n)}(x) = 0$$

2. (a) Démontrons la formule annoncée par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathcal{H}_n : \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = (n-1)! \cos(f(x))^n \sin\left(n\left(f(x) + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Initialisation. Pour $n = 1$, nous savons que $f' : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. Le membre de droite vaut :

$$0! \cos(f(x)) \sin\left(f(x) + \frac{\pi}{2}\right) = \cos^2(f(x)) = \frac{1}{1 + \tan(f(x))^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

Ceci en utilisant les formules de trigonométrie :

$$\forall a \in \mathbb{R}, 1 + \tan^2(a) = \frac{1}{\cos^2(a)} \text{ et } \forall a \in \mathbb{R}, \sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(a)$$

Nous avons démontré la validité de $\mathcal{H}_1$.

Hérédité. On suppose que $\mathcal{H}_n$ est vraie pour un entier naturel $n \geq 1$ fixé. Il s'agit de dériver la formule donnée par $\mathcal{H}_n$, ce qui est possible car f , $\sin$ et $\cos$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (n-1)! \left(-nf'(x) \sin(f(x)) \cos(f(x))^{n-1} \sin\left(n\left(f(x) + \frac{\pi}{2}\right)\right) + nf'(x) \cos(f(x))^n \cos\left(n\left(f(x) + \frac{\pi}{2}\right)\right) \right) \\ &= n! f'(x) \cos(f(x))^{n-1} \left(-\sin(f(x)) \sin\left(n\left(f(x) + \frac{\pi}{2}\right)\right) + \cos(f(x)) \cos\left(n\left(f(x) + \frac{\pi}{2}\right)\right) \right) \\ &= n! f'(x) \cos(f(x))^{n-1} \left(\cos\left(f(x) + n\left(f(x) + \frac{\pi}{2}\right)\right) \right) \\ &= n! \cos^2(f(x)) \cos(f(x))^{n-1} \sin\left((n+1)\left(f(x) + \frac{\pi}{2}\right)\right) \quad (\star) \\ &= n! \cos(f(x))^{n+1} \sin\left((n+1)\left(f(x) + \frac{\pi}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

($\star$) Pour ce passage, nous avons utilisé $f' = \cos(f)^2$, formule que nous avons vue dans l'initialisation ainsi que la relation trigonométrique classique : $\forall a \in \mathbb{R}, \sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(a)$.

Ceci démontre que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie et termine la récurrence.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = (n-1)! \cos(f(x))^n \sin\left(n\left(f(x) + \frac{\pi}{2}\right)\right)}$$

(b) La fonction Arctan est à valeurs dans $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$, intervalle sur lequel $\cos$ est strictement positive.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \cos(f(x)) > 0}$$

(c) D'après les deux questions précédentes, pour $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) = 0 &\Leftrightarrow \sin\left(n\left(f(x) + \frac{\pi}{2}\right)\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow n\left(f(x) + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \pmod{\pi} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, f(x) = \frac{(2k-n)\pi}{2n} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, f(x) = \frac{(2k-n)\pi}{2n} \quad (\star) \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, x = \tan\left(\frac{(2k-n)\pi}{2n}\right) \end{aligned}$$

($\star$) Pour justifier ce passage, il faut remarquer que la fonction f est à valeurs dans $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ et :

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{(2k-n)\pi}{2n} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < 2k\pi < 2n\pi \Leftrightarrow 0 < k < n$$

La fonction $\tan$ étant strictement croissante sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, elle ne prend pas deux fois la même valeur et nous avons trouvé nos $n - 1$ racines distinctes de $f^{(n)}$.

Les zéros de $f^{(n)}$ sont les $\tan\left(\frac{(2k-n)\pi}{2n}\right)$ avec $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$

3. (a) Déjà la fonction φ est bien définie sur $\mathbb{R}$ car son dénominateur ne s'annule pas puisque $a \notin \mathbb{R}$.
Pour $x \in \mathbb{R}$, nous avons :

$$\varphi(x) = \frac{1}{x+a} = \frac{1}{x+\alpha+i\beta} = \frac{x+\alpha-i\beta}{(x+\alpha)^2+\beta^2} = \underbrace{\frac{x+\alpha}{(x+\alpha)^2+\beta^2}}_{u(x)} + i \underbrace{\frac{-\beta}{(x+\alpha)^2+\beta^2}}_{v(x)}$$

On voit ainsi que u et v sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Ce qui va légitimer toutes les dérivations que nous allons effectuer dans la suite.

φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$

- (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $(x+a)\varphi(x) = 1$, ce qui se traduit avec les notations de l'énoncé par :

$$(x+\alpha+i\beta)(u(x)+iv(x)) = 1$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires dans la relation précédente, nous avons :

$$\begin{cases} (x+\alpha)u(x) - \beta v(x) &= 1 & (1) \\ \beta u(x) + (x+\alpha)v(x) &= 0 & (2) \end{cases}$$

- (c) On trouve ces deux formules à partir des relations (1) et (2) en procédant de la même façon que dans la question 1.(c), c'est-à-dire à l'aide d'une récurrence et en dérivant la relation au rang n pour passer au rang $n+1$.

$$\begin{cases} (x+\alpha)u^{(n)}(x) + nu^{(n-1)}(x) - \beta v^{(n)}(x) &= 0 & (3) \\ \beta u^{(n)}(x) + (x+\alpha)v^{(n)}(x) + nv^{(n-1)}(x) &= 0 & (4) \end{cases}$$

- (d) On réalise ensuite la combinaison (3) + i (4) pour obtenir, toujours pour $x \in \mathbb{R}$:

$$(x+\alpha+i\beta)u^{(n)}(x) + (-\beta+i(x+\alpha))v^{(n)}(x) + n(u^{(n-1)}(x) + iv^{(n-1)}(x)) = 0$$

ou encore en simplifiant :

$$(x+\alpha+i\beta)(u^{(n)}(x) + iv^{(n)}(x)) + n(u^{(n-1)}(x) + iv^{(n-1)}(x)) = 0$$

et en réutilisant la fonction φ :

$$\forall n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}, (x+a)\varphi^{(n)}(x) + n\varphi^{(n-1)}(x) = 0$$

- (e) Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{H}_n : \varphi^{(n)} : x \mapsto \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$$

Initialisation. Pour $n = 0$, la formule est évidente.

Hérédité. On suppose le résultat vrai au rang $n - 1$ avec n un entier naturel non nul fixé.

D'après la relation trouvée à la question précédente, nous avons :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi^{(n)}(x) = -n\varphi^{(n-1)}(x) \times \frac{1}{x+a} = -n \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+a)^n} \times \frac{1}{x+a} = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$$

Ce qui termine la récurrence et démontre la formule souhaitée.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \varphi^{(n)} : x \mapsto \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$$

(f) Pour $x \in \mathbb{R}$, on réalise la décomposition en éléments simples suivante :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{(x-i)(x+i)} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i} \right)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i} \right)$$

(g) Il reste à appliquer la formule trouvée dans la question 3.(e) pour obtenir :

$$\forall n \geq 1, f^{(n)} : x \mapsto \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2i} \left(\frac{1}{(x-i)^n} - \frac{1}{(x+i)^n} \right)$$