Logique

1 Préciser, avec des justifications, si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

a) La négation de "f est une fonction paire" est "f est une fonction impaire".

b) Lorsque la proposition (P et Q) est vraie, la proposition (P ou Q) est vraie.

c) La négation de ($P \Rightarrow Q$) est ($P \Rightarrow$ non Q).

d) Lorsque P est fausse et ($P \Rightarrow Q$) est vraie alors Q est également fausse.

e) Paris est en France ou Madrid est en Chine.

f) Si l'homme est un quadrupède alors il aboie.

2 Donner la négation des propositions suivantes :

a) S'il pleut, je prends mon parapluie.

b) Chaque été, il pleut au moins un jour en Bretagne.

c) L'été dernier, il a plu tous les jours en Bretagne.

d) $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ 2 \leq x \leq y.$

e) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$

3 Décrire les parties de $\mathbb{R}$ dans lesquelles évolue x pour que les assertions suivantes soient vraies :

a) ($x > 0$ et $x < 1$) ou ($x = 0$)

b) ($x > 3$ et $x < 5$) et $x \neq 4$

c) ($x \leq 0$ et $x > 1$) ou ($x = 4$)

d) $x \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$

4 Compléter les assertions suivantes avec $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ ou $\Leftrightarrow$.

a) $x^2 \geq 9$ ... $x \geq 3$.

b) $x = 1$ ... $x^2 - 1 = 0$.

c) $x > 2$ ... $x \geq 3$.

d) f croissante ... f strictement croissante.

e) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1$ ... (u_n) est une suite constante.

f) $x = 2$ ... $x^2 - 4x + 4 = 0$.

5 Soit n un entier naturel. Parmi les phrases suivantes, lesquelles traduisent l'implication : $4|n \Rightarrow 2|n$.

a) Si 4 divise n alors 2 divise n.

b) 2 divise n si et seulement si 4 divise n.

c) Pour que 2 divise n , il faut que 4 divise n.

d) Pour que 2 divise n, il suffit que 4 divise n.

e) La condition 2 divise n est nécessaire pour que 4 divise n.

f) La condition 4 divise n est nécessaire pour que 2 divise n.

g) La condition 4 divise n est suffisante pour que 2 divise n.

6 ♡★ Soit n un entier naturel. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, pourquoi ?

a) $n \geq 5 \Rightarrow n > 3$

b) $n \geq 5 \Rightarrow n > 6$

c) $n \geq 5 \Rightarrow n \leq 6$

d) $n > 1 \Rightarrow 2|n$

e) $n < 2 \Rightarrow n^2 = n$

f) $n < 0 \Rightarrow n > 0$

g) $n \geq 5 \Leftrightarrow n > 4$

h) $n \geq 5 \Leftrightarrow n \geq 4$

i) ($n \geq 5$ et $n|12$) $\Leftrightarrow n = 6$

j) ($3|n$ et $4|n$) $\Leftrightarrow 12|n$

k) ($n|3$ ou $n|4$) $\Leftrightarrow n|12$

Quantificateurs

7 Écrire la négation de la proposition :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \left(|x| < \alpha \Rightarrow \left|\frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\right| < \varepsilon\right)$$

8 Vrai ou faux ? Justifez vos réponses.

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ y = x^2$

b) $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ y = x^2$

c) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ y = x^2$

d) $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ y = x^2$

e) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x = y^2$

f) $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x = y^2$

g) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x = y^2$

h) $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x = y^2$

i) $\exists a \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall \varepsilon > 0,\ a \leq \varepsilon$

j) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in \mathbb{R}_+,\ a < \varepsilon$

k) $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R}_+,\ y < \sqrt{x}$

9 ♡★ Soient (u_n) une suite de nombres réels et f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Écrire avec des quantificateurs chacune des propositions suivantes.

a) La suite (u_n) est majorée par 4.

b) La suite (u_n) est majorée.

c) La suite (u_n) n'est pas majorée.

d) La suite (u_n) est bornée.

e) La suite (u_n) est croissante.

f) La suite (u_n) est constante.

g) La fonction f est la fonction nulle.

h) La fonction f s'annule.

i) La fonction f est croissante.

j) La fonction f admet un maximum.

k) La fontion f ne prend pas deux fois la même valeur.

Méthodes de démonstration

10 Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n^3 \text{ impair} \Leftrightarrow n \text{ impair}$$

11 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x = \sqrt{2x+35}$.

12 ★ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $2^n + 3^n \leq 5^n$.

13 ★ Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe deux entiers naturels p et q tels que $n = 2^p(2q+1)$.
On pourra utiliser une récurrence forte.

14 ♡★ Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = -5 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$$

Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 4 \times 2^{n+1} - 7 \times 3^n$.

15 ★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que :

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

16 ♡★ À l'aide d'un raisonnement par analyse-synthèse, déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2,\ f(m+n) = f(m) + f(n)$$

On pourra commencer par déterminer $f(0)$ et on exprimera f en fonction de $a = f(1)$.

17 ★★ À l'aide d'un raisonnement par analyse-synthèse, déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x)f(y) = f(xy) + x + y$$

18 ★★ Démontrer que :

$$\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{Z}^4,\ a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2} \Rightarrow (a = c \text{ et } b = d)$$

19 ★★ Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2^{n-1} \leq n! \leq n^n$$

Défis

D1 On dispose de neuf billes visuellement identiques, huit d'entre elles ont la même masse mais la neuvième est plus lourde. Comment peut-on démasquer l'intrus en deux pesées sur une balance à deux plateaux ?

D2 ★★ On dispose de neuf billes visuellement identiques de même masse sauf une. Comment peut-on démasquer l'intrus en trois pesées sur une balance à deux plateaux ?

D3 ★★★★ Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tous réels $(x_k)_{1\leq k\leq n} \in (\mathbb{R}_+^*)^n$:

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\Big) \geq n^2$$