Relations binaires

Relations d'équivalence

1 On note $\mathcal{R}$ la relation binaire définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow |x| = |y|$$

Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et décrire la classe de x, pour $x \in \mathbb{R}$.

2 On note $\mathcal{R}$ la relation binaire définie sur $\mathbb{Z}$ par :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{Z}^2,\ m\mathcal{R}n \Leftrightarrow\ m+n \text{ est pair}$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Déterminer les classes d'équivalence.

3 ♡★ On note $\mathcal{R}$ la relation binaire définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Déterminer les classes d'équivalence.

4 ♡★★ On note $\mathcal{R}$ la relation binaire définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xe^y = ye^x$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
Soit $x \in \mathbb{R}$ donner le nombre d'éléments de la classe de x.

Relations d'ordre

5 Soit f une application injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit sur $\mathbb{R}$ la relation binaire $\propto$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \propto y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$$

Montrer que $\propto$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.

6 ★ Soient A et B deux parties d'un ensemble ordonné E. On suppose que A et B ont chacune un plus grand élément.

a) Si l'ordre est total, montrer que $A \cup B$ a un plus grand élément.

b) Trouver un contre-exemple quand l'ordre n'est pas total.

c) Reprendre les questions précédentes en prenant $A \cap B$ à la place de $A \cup B$.

7 ♡★ On définit sur $\mathbb{R}_+^*$ la relation binaire suivante :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N},\ y = x^n$$

a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Cet ordre est-il total ?