

Pour toutes ces questions, on considère la fonction $h : z \mapsto \frac{z+1}{z-2}$ définie sur $\mathbb{C} \setminus \{2\}$.

1. Trouver tous les nombres complexes z tels que :

a) $h(z) = 2$

b) $h(z) = i$

c) $h(z) = 1$

d) $|h(z)| = 1$

e) $\operatorname{Re}(h(z)) = 0$

f) z possède un antécédent par h

2. Montrer que h est injective

3. Simplifier l'expression de la fonction $h \circ h$.

a) Trouver tous les nombres complexes z tels que $h(z) = 2$.

Réponse : Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{2\}$, on a :

$$h(z) = 2 \Leftrightarrow \frac{z+1}{z-2} = 2$$

$$\Leftrightarrow z+1 = 2(z-2)$$

$$\Leftrightarrow z = 5$$

Seul $z = 5$ convient.

b) Trouver tous les nombres complexes z tels que $h(z) = i$.

Réponse : Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{2\}$, on a :

$$h(z) = i \Leftrightarrow \frac{z+1}{z-2} = i$$

$$\Leftrightarrow z+1 = i(z-2)$$

$$\Leftrightarrow (1-i)z = -1-2i$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1+2i}{-1+i}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$$

Seul $z = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$ convient.

c) Trouver tous les nombres complexes z tels que $h(z) = 1$.

Réponse : Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{2\}$, on a :

$$h(z) = 1 \Leftrightarrow \frac{z+1}{z-2} = 1$$

$$\Leftrightarrow z+1 = z-2$$

$$\Leftrightarrow 1 = -2$$

Cette équation n'a pas de solution.

d) Trouver tous les nombres complexes z tels que $|h(z)| = 1$.

Réponse : Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{2\}$, on note $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$h(z) = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{z+1}{z-2} \right| = 1$$

$$\Leftrightarrow |z+1| = |z-2|$$

$$\Leftrightarrow |z+1|^2 = |z-2|^2$$

$$\Leftrightarrow (a+1)^2 + b^2 = (a-2)^2 + b^2$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

Les solutions sont exactement les nombres complexes z de partie réelle $\frac{1}{2}$.

e) Trouver tous les nombres complexes z tels que $\operatorname{Re}(h(z)) = 0$.

Réponse : Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{2\}$, on note $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, déterminons dans un premier temps la partie réelle de $h(z)$.

$$\begin{aligned}h(z) &= \frac{z+1}{z-2} \\&= \frac{a+1+ib}{a-2+ib} \\&= \frac{(a+1+ib)(a-2-ib)}{(a-2+ib)(a-2-ib)} \\&= \frac{(a+1)(a-2) + b^2 + i(b(a-2) - b(a+1))}{(a-2)^2 + b^2}\end{aligned}$$

$$\text{On a } \operatorname{Re}(h(z)) = \frac{(a+1)(a-2) + b^2}{(a-2)^2 + b^2}$$

Ainsi :

$$\operatorname{Re}(h(z)) = 0 \Leftrightarrow (a+1)(a-2) + b^2 = 0$$

Ainsi :

$$\operatorname{Re}(h(z)) = 0 \Leftrightarrow (a+1)(a-2) + b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - a + b^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + b^2 = \frac{9}{4}$$

Ainsi :

$$\operatorname{Re}(h(z)) = 0 \Leftrightarrow (a+1)(a-2) + b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - a + b^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + b^2 = \frac{9}{4}$$

On reconnaît l'équation du cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et de rayon $\frac{3}{2}$. Cependant le point B d'affixe $z = 2$ appartient à ce cercle, il convient donc de l'enlever. Les solutions ont donc pour images dans le plan complexe $\mathcal{C} \setminus \{B\}$.

f) Trouver tous les nombres complexes z qui possèdent un antécédent par h

Réponse : Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{2\}$, on a :

z possède un antécédent par h

f) Trouver tous les nombres complexes z qui possèdent un antécédent par h

Réponse : Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{2\}$, on a :

$$z \text{ possède un antécédent par } h \Leftrightarrow \exists \omega \in \mathbb{C} \setminus \{2\}, h(\omega) = z$$

$$\Leftrightarrow \frac{\omega + 1}{\omega - 2} = z$$

$$\Leftrightarrow \omega + 1 = z(\omega - 2)$$

$$\Leftrightarrow \omega(1 - z) = -2z - 1$$

Si $z = 1$ cette équation n'a clairement pas de solution. Pour $z \neq 1$, il est possible de trouver un antécédent à z qui vaut :

$$\omega = \frac{1 + 2z}{z - 1}$$

Tous les nombres complexes différents de 1 possèdent un antécédent par h .

2. Montrer que h est injective

Réponse : On suppose qu'il existe z et z' deux complexes différents de 2 tels que $h(z) = h(z')$. On a :

$$\begin{aligned}h(z) = h(z') &\Leftrightarrow \frac{z+1}{z-2} = \frac{z'+1}{z'-2} \\&\Leftrightarrow (z+1)(z'-2) = (z-2)(z'+1) \\&\Leftrightarrow z = z'\end{aligned}$$

Ce qui démontre bien que h est injective.

3. Simplifier l'expression de la fonction $h \circ h$.

Réponse :

3. Simplifier l'expression de la fonction $h \circ h$.

Réponse : Tout d'abord afin de pouvoir définir $h(h(z))$, il faut que $z \neq 2$ et $h(z) \neq 2$, c'est-à-dire que $h \circ h$ est définie sur $\mathbb{C} \setminus \{2, 5\}$. On a alors :

$$h(h(z)) = \frac{\frac{z+1}{z-2} + 1}{\frac{z+1}{z-2} - 2} = \frac{z + 1 + z - 2}{z + 1 - 2(z - 2)} = \frac{2z - 1}{5 - z}$$