1-Une suite réelle croissante à partir d'un certain rang est-elle minorée ?

2-Donner deux exemples de suites (u_n) telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$.

3-Vrai ou faux : si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)^n = 1$.

4-Soient (u_n) et (v_n) des suites réelles qui ne s'annulent pas. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$, a-t-on $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$?

5-Soient (u_n) et (v_n) des suites réelles qui ne s'annulent pas. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$, a-t-on $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$?

6-Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq 2 \text{ et } 0 \leq v_n \leq 3 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = 6 \end{cases}$$

Montrer que (u_n) tend vers 2 et (v_n) tend vers 3.

1-Une suite réelle croissante à partir d'un certain rang est-elle minorée ?

Réponse : C'est vrai, démontrons-le. Si (u_n) est croissante à partir du rang $N \in \mathbb{N}$ alors :

$$\forall n \geq N,\ u_n \geq u_N$$

Avant le rang N, il y a un nombre fini de valeurs prises donc cet ensemble de valeurs est minoré. Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq \min\{u_i,\ i \in [\![0, N]\!]\}$$

La suite (u_n) est minorée.

2-Donner deux exemples de suites (u_n) telles que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$.

Réponse : • On pose $u_n = \ln(n)$ définie pour $n \in \mathbb{N}^*$. La suite (u_n) tend vers $+\infty$ et :

$$\ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

• On pose $v_n = \sqrt{n}$ défnie pour $n \in \mathbb{N}$. La suite (v_n) tend vers $+\infty$ et :

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

• On pose $w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ définie pour $n \in \mathbb{N}^*$. Nous avons vu que la suite (w_n) tend vers $+\infty$ et :

$$w_{n+1} - w_n = \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

3-Vrai ou faux : si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)^n = 1$.

Réponse : C'est faux. On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$ mais nous avons vu que :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

4-Soient (u_n) et (v_n) des suites réelles qui ne s'annulent pas. On suppose que $\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$, a-t-on $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$?

Réponse : On a :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right) = 0$$

pourtant :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = +\infty$$

C'est donc faux.

5-Soient (u_n) et (v_n) des suites réelles qui ne s'annulent pas. On suppose que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$, a-t-on $\lim_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$?

Réponse : On a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+n}{n^2} = 1$$

pourtant :

$$\lim_{n\to+\infty} (n^2+n) - n^2 = +\infty$$

C'est donc faux.

6-Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq 2 \text{ et } 0 \leq v_n \leq 3 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} u_n v_n = 6 \end{cases}$$

Que peut-on dire des suites (u_n) et (v_n) ?

Réponse : Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n \frac{v_n}{3} \leq u_n \leq 2 \text{ et } \frac{u_n}{2} v_n \leq v_n \leq 3$$

On utilise le théorème d'encadrement pour obtenir :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 2 \text{ et } \lim_{n \to +\infty} v_n = 3$$