1. Simplifier $\dfrac{-1}{j^5+1}$.

2. Donner une écriture exponentielle et l'écriture algébrique des racines 6-ièmes de l'unité.

3. Parmi les racines précédentes reconnaître, en le justifiant, j, j^2, $-j$ et $-j^2$.

4. Tracer le polygone dont les sommets ont pour affixes les racines 6-ièmes de l'unité.

5. Quelle est la longueur d'un côté de ce polygone ?

6. Quelle est l'aire de ce polygone ?

7. Trouver les solutions de l'équation $z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0$.

8-Trouver tous les $z \in \mathbb{C}$ tels que $z^{2n}+z^n+1=0$.

1. Simplifier $\dfrac{-1}{j^5+1}$.

Réponse : On remarque que : $j^5 = j^3 j^2 = j^2$. En utilisant la relation $1 + j + j^2 = 0$, on obtient :

$$\frac{-1}{j^5+1} = \frac{-1}{j^2+1} = \frac{-1}{-j} = \frac{1}{j} = j^2$$

2. Donner une écriture exponentielle et l'écriture algébrique des racines 6-ièmes de l'unité.

Réponse : D'après le cours, les racines n-ièmes de l'unité sont exactement les nombres complexes $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$. Ici $n = 6$, cela donne donc :

$$z_0 = 1, \quad z_1 = e^{\frac{2i\pi}{6}} = e^{\frac{i\pi}{3}}, \quad z_2 = e^{\frac{4i\pi}{6}} = e^{\frac{2i\pi}{3}}, \quad z_3 = e^{\frac{6i\pi}{6}} = -1$$

$$z_4 = e^{\frac{8i\pi}{6}} = e^{\frac{4i\pi}{3}}, \quad z_5 = e^{\frac{10i\pi}{6}} = e^{\frac{5i\pi}{3}}$$

On utilise ensuite les valeurs suivantes :

- $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$
- $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$
- $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Ces valeurs nous permettent d'obtenir la forme algébrique des racines 6-ièmes de l'unité :

$$z_0 = 1$$

$$z_1 = e^{\frac{i\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_2 = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_3 = -1$$

$$z_4 = e^{\frac{4i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_5 = e^{\frac{5i\pi}{3}} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

3. Parmi les racines précédentes reconnaître, en le justifiant, j, j^2, $-j$ et $-j^2$.

Réponse : On reconnaît : $z_2 = j$ et $z_4 = j^2$.

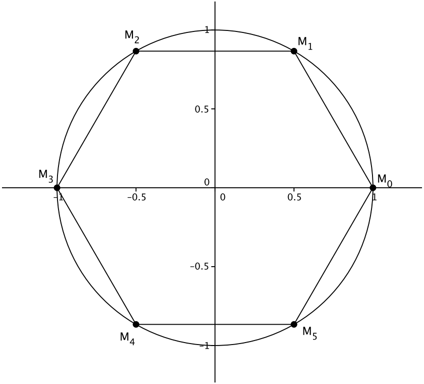
D'autre part :

$$-j = -e^{\frac{2i\pi}{3}} = e^{i\pi}e^{\frac{2i\pi}{3}} = e^{\frac{5i\pi}{3}} = z_5$$

$$-j^2 = -e^{\frac{4i\pi}{3}} = e^{-i\pi}e^{\frac{4i\pi}{3}} = e^{\frac{i\pi}{3}} = z_1$$

4. Tracer le polygone dont les sommets ont pour affixes les racines 6-ièmes de l'unité.

Réponse :



5. Quelle est la longueur d'un côté de ce polygone ?

Réponse : La longueur de ce côté est :

$$\left|z_1 - z_0\right| = \left|\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right| = \left| -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = 1$$

6. Quelle est l'aire de ce polygone ?

Réponse : Cet hexagone régulier est composé de 6 triangles équilatéraux ayant les côtés de longueur 1. La hauteur d'un tel triangle vaut $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et l'aire est égale à $\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2} \times 1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Finalement, l'aire vaut $6 \times \dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

7. Trouver les solutions de l'équation $z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.

Réponse : On a :

$$z^6 - 1 = (z - 1)(z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$$

Nous avons vu que les solutions de l'équation $z^6 - 1 = 0$ sont les racines 6-ièmes de l'unité. Ainsi la factorisation précédente permet de dire que les solutions de l'équation $z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ sont les racines 6-ièmes de l'unité sauf 1 qui est solution de $z - 1 = 0$.