

En l'absence de précisions, y désigne une fonction de la variable x et l'on demande de trouver les solutions à valeurs dans $\mathbb{R}$ des équations différentielles proposées.

Ordre 1

1 Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\sqrt{1-x^2}y' + y = 1 \text{ sur }]-1, 1[$$

2 ♥★ Résoudre les équations différentielles suivantes sur les intervalles précisés :

a) $(2 + \cos(x))y' + \sin(x)y = (2 + \cos(x))\sin(x)$ sur $\mathbb{R}$

b) $(1 + \cos^2(x))y' - \sin(2x)y = \cos(x)$ sur $\mathbb{R}$

c) $\sin(x)y' - \cos(x)y + 1 = 0$ sur $]0, \pi[$

d) $\sin(x)^3 y' = 2\cos(x)y$ sur $]0, \pi[$

3 ★ Résoudre les équations différentielles suivantes sur les intervalles précisés :

a) $\operatorname{ch}(x)y' - \operatorname{sh}(x)y = \operatorname{sh}^3(x)$ sur $\mathbb{R}$

b) $y' - \frac{\operatorname{sh}(x)}{1 + \operatorname{ch}(x)}y = \operatorname{sh}(x)$ sur $\mathbb{R}$

c) $\operatorname{sh}(x)y' - \operatorname{ch}(x)y = 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$

4 ★ Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles :

a) $y' + 2y = x^2$

b) $y' + y = 2\sin(x)$

c) $y' - y = (x+1)e^x$

d) $y' + y = x - e^x + \cos(x)$

5 ★ Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles :

a) $(x^2 + 1)y' + 2xy + 1 = 0$

b) $(x^2 + 1)y' - xy = (x^2 + 1)^{3/2}$

6 ★ Résoudre les équations différentielles suivantes sur les intervalles précisés :

a) $(1 + e^x)y' + e^xy = 1 + e^x$ sur $\mathbb{R}$

b) $(e^x - 1)y' + e^xy = 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$

c) $x(1 + \ln^2 x)y' + 2\ln(x)y = 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$

7 ♥★★ Déterminer les fonctions $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall x \in [0, 1], f'(x) + f(x) = f(0) + f(1)$$

Ordre 2

8 ♥ Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles :

a) $y'' + 2y' + 2y = 2x$

b) $y'' + y = x^2 + 1$

c) $y'' - 3y' + 2y = 2x^2$

9 ★ Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles :

a) $y'' + 2y' + y = xe^x$

b) $y'' + y' - 2y = xe^x$

c) $y'' + 2y' + 2y = (x+1)e^{-x}$

10 ♥★ Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles :

a) $y'' + y = \operatorname{sh}(x)$

b) $y'' - 3y' + 2y = x\operatorname{ch}(x)$

c) $y'' - 2y' + y = 2\operatorname{ch}(x)$

11 ★ Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles :

a) $y'' + 2y' + 2y = \sin(x)$

b) $y'' + y = x\sin(x)$

c) $y'' + y = 2\cos^2(x)$

12 ★ Déterminer les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(\pi - x)$$

13 ♥★ Déterminer les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(-x) = e^x$$

14 ★★★ Le but de l'exercice est de trouver toutes les fonctions dérivables deux fois sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(-x) = x^2 + \sin(x)$$

a) Déterminer les solutions paires de $y'' + y = x^2$.

b) Déterminer les solutions impaires de $y'' - y = \sin(x)$.

c) En déduire les solutions du problème initial.

Divers

15 ★ Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x'' = x' + y' - y \\ y'' = x' + y' - x \end{cases}$$

où x et y sont des fonctions de la variable t .

16 ★ Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$(1 + e^x)y'' + 2e^xy' + (2e^x + 1)y = xe^x$$

On pourra poser $z(x) = (1 + e^x)y(x)$.

17 ★ Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle :

$$x^2 y'' + xy' + y = 0$$

On pourra poser $x = e^t$.

18 ♡★ Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$(1+x^2)^2 y'' + 2(x-1)(1+x^2)y' + y = 0$$

On pourra poser $t = \arctan(x)$.

19 ★ On considère l'équation différentielle

$$(E) : xy' + (x+1)y = x+1$$

a) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.

b) L'équation (E) a-t-elle une solution sur $\mathbb{R}$?

20 ★ Trouver toutes les solutions dérivables sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$(E) : x^3 y' - 2y = 0$$

Défis

D1 ★★★ Montrer que l'équation différentielle :

$$y' + 2xy = 1$$

admet une unique solution impaire.

D2 ★★★ Déterminer les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$$

D3 ★★★ Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle :

$$(E) : y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}$$