a) La négation de "f est une fonction paire" est "f est une fonction impaire".

C'est faux, la fonction exponentielle définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ n'est ni paire ni impaire.

b) Lorsque la proposition (P et Q) est vraie, la proposition (P ou Q) est vraie.

C'est vrai, d'après les tables de vérités.

c) La négation de $(P \Rightarrow Q)$ est $(P \Rightarrow \text{non } Q)$.

C'est faux, la négation de $(P \Rightarrow Q)$ est $(P \text{ et non}(Q))$ qui n'a pas la même valeur de vérité que $(P \Rightarrow \text{non } (Q))$.

d) Lorsque P est fausse et $(P \Rightarrow Q)$ est vraie alors Q est également fausse.

C'est faux, Q pourrait être également vraie, voir la table de vérité du connecteur implication.

e) Paris est en France ou Madrid est en Chine.

C'est vrai.

f) Si l'homme est un quadrupède alors il aboie.

C'est vrai, car la proposition "l'homme est un quadrupède" est fausse.

a) S'il pleut, je prends mon parapluie.

Il pleut et je ne prends pas mon parapluie. La négation de $P \Rightarrow Q$ est (P et non(Q)).

b) Chaque été, il pleut au moins un jour en Bretagne.

Il y a eu un été en Bretagne sans jour de pluie.

c) L'été dernier, il a plu tous les jours en Bretagne.

L'été dernier, il y a eu un jour sans pluie en Bretagne.

d) $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ 2 \leq x \leq y$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ 2 > x$ ou $x > y$.

En effet, $2 \leq x \leq y$ se traduit par $2 \leq x$ et $x \leq y$ et la négation de (P et Q) est bien (non(P) ou non(Q))

e) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

On doit nier une implication :

$$\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ f(x) = f(y) \text{ et } x \neq y$$

a) $(x > 0 \text{ et } x < 1)$ ou $(x = 0)$

Cela correspond à $[0, 1[$.

b) $(x > 3 \text{ et } x < 5)$ et $x \neq 4$

Cela correspond à $]3,4[\cup]4,5[$.

c) $(x \leq 0 \text{ et } x > 1)$ ou $(x = 4)$

Cela correspond à $\{4\}$.

d) $x \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$

Cela correspond à $]-\infty, 0[\cup[2, +\infty[$. En effet, quand x est négatif l'implication est vraie !

a) $x^2 \geq 9 \Leftarrow x \geq 3$.

b) $x = 1 \Rightarrow x^2 - 1 = 0$.

c) $x > 2 \Leftarrow x \geq 3$.

d) f croissante $\Leftarrow f$ strictement croissante.

e) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1 \Rightarrow (u_n)$ est une suite constante.

f) $x = 2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$.

Chapitre 2-Exercice 5

a) Vrai

b) Faux

c) Faux

d) Vrai

e) Vrai

f) Faux

g) Vrai

a) $n \geq 5 \Rightarrow n > 3$

Vrai.

b) $n \geq 5 \Rightarrow n > 6$

Faux, pour $n = 5$.

c) $n \geq 5 \Rightarrow n \leq 6$

Faux.

d) $n > 1 \Rightarrow 2|n$

Faux pour $n = 3$.

e) $n < 2 \Rightarrow n^2 = n$

C'est vrai, si $n < 2$ alors $n = 0$ ou $n = 1$ car $n \in \mathbb{N}$ donc $n^2 = n$.

f) $n < 0 \Rightarrow n > 0$

C'est vrai, puisque la proposition $n < 0$ est fausse pour $n \in \mathbb{N}$.

g) $n \geq 5 \Leftrightarrow n > 4$

C'est vrai, car n est un entier.

h) $n \geq 5 \Leftrightarrow n \geq 4$

C'est faux, si $n = 4$.

i) $(n \geq 5 \text{ et } n|12) \Leftrightarrow n = 6$

C'est faux, si $n = 12$.

j) $(3|n \text{ et } 4|n) \Leftrightarrow 12|n$

C'est vrai.

k) $(n|3 \text{ ou } n|4) \Leftrightarrow n|12$

C'est faux si $n = 12$.

Écrire la négation de la proposition :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \left(|x| < \alpha \Rightarrow \left|\frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\right| < \varepsilon\right)$$

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \alpha > 0,\ \exists x \in \mathbb{R},\ \left(|x| < \alpha \text{ et } \left|\frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\right| \geq \varepsilon\right)$$

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ y = x^2$

C'est faux pour $x = 1$ et $y = 2$ par exemple.

b) $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ y = x^2$

C'est faux, aucun réel au carré ne peut donner tous les autres réels.

c) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ y = x^2$

C'est vrai, en choisissant $y = x^2$.

d) $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ y = x^2$

C'est vrai, en prenant par exemple $x = 1$ et $y = 1$.

e) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x = y^2$

C'est faux, en prenant par exemple $x = 2$ et $y = 1$.

f) $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x = y^2$

C'est faux, un réel x fixé ne pouvant prendre plusieurs valeurs.

g) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x = y^2$

C'est faux, si l'on prend x négatif il ne pourra pas s'écrire comme le carré d'un nombre réel.

h) $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x = y^2$

C'est vrai, en prenant par exemple $x = y = 1$.

i) $\exists a \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall \varepsilon > 0,\ a \leq \varepsilon$

C'est faux, démontrons la négation qui s'écrit :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \varepsilon > 0,\ a > \varepsilon$$

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, on cherche $\varepsilon > 0$ tel que $a > \varepsilon$. On peut poser $\varepsilon = \frac{a}{2}$, on a bien $\varepsilon > 0$ et $a > \frac{a}{2} = \varepsilon$. Ce qui démontre la négation.

j) $\forall \varepsilon > 0, \ \exists a \in \mathbb{R}_+, \ a < \varepsilon$

C'est vrai, démontrons-le.

Soit $\varepsilon > 0$, on pose $a = 0$, on a bien $a < \varepsilon$, ce qui démontre la propriété.

k) $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R}_+,\ y < \sqrt{x}$

C'est vrai, démontrons-le.

Soit $y \in \mathbb{R}$, on pose $x = y^2 + 1$. On a alors :

$$y \leq |y| = \sqrt{y^2} < \sqrt{y^2 + 1} = \sqrt{x}$$

Ce qui démontre le résultat.

a) La suite (u_n) est majorée par 4

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq 4$$

b) La suite (u_n) est majorée.

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M$$

c) La suite (u_n) n'est pas majorée.

C'est la négation de la proposition précédente :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ u_n > M$$

d) La suite (u_n) est bornée.

$$\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ m \leq u_n \leq M$$

ou

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M$$

e) La suite (u_n) est croissante.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n \leq u_{n+1}$$

f) La suite (u_n) est constante.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n$$

ou

$$\exists k \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = k$$

g) La fonction f est la fonction nulle

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$$

h) La fonction f s'annule.

$$\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$$

i) La fonction f est croissante.

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

j) La fonction f admet un maximum.

$$\exists c \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq f(c)$$

k) La fontion f ne prend pas deux fois la même valeur.

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

ou

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$