A-Généralités

1. Il y a deux cas à considérer :

• si $c=0$ alors $d\neq 0$ grâce à la condition de l'énoncé $(c,d)\neq(0,0)$ ainsi $f:z\mapsto \dfrac{az+b}{d}$ est clairement définie sur $\mathbb{C}$.

• si $c\neq 0$ alors f est définie sur $\mathbb{C}\setminus\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$ afin que le dénominateur ne s'annule pas.

$$\boxed{\text{l'ensemble de définition de } f \text{ est } \mathbb{C} \text{ si } c=0 \text{ et } \mathbb{C}\setminus\left\{-\frac{d}{c}\right\} \text{ si } c\neq 0}$$

2. (a) D'après l'hypothèse de cette question, on a $ad=bc$ ainsi en supposant de plus que $a=0$, on a $bc=0$ ce qui donne deux cas :

• soit $b=0$ et dans ce cas f est l'application nulle.

• soit $c=0$ et dans ce cas f est l'application constante égale à $\dfrac{b}{d}$ sachant que d est bien non nul car $c=0$.

$$\boxed{\text{si } a=0 \text{ alors } f \text{ est constante}}$$

(b) Si $c=0$ alors $ad=bc=0$, ce qui fait deux cas à considérer :

• soit $d=0$ mais ce cas est à exclure car c et d ne peuvent s'annuler simultanément.

• soit $a=0$ et dans ce cas f est à nouveau l'application constante égale à $\dfrac{b}{d}$.

$$\boxed{\text{si } c=0 \text{ alors } f \text{ est constante}}$$

(c) Supposons à présent $a\neq 0$ et $c\neq 0$, l'hypothèse $ad-bc=0$ se réécrit dans ce cas $\dfrac{b}{a}=\dfrac{d}{c}$. Ainsi pour z dans l'ensemble de définition de f, nous avons :

$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{a\left(z+\frac{b}{a}\right)}{c\left(z+\frac{d}{c}\right)}=\frac{a}{c}$$

Ce qui montre, dans ce cas également, que f est constante.
En résumé :

$$\boxed{\text{si } ad-bc=0 \text{ alors } f \text{ est constante}}$$

3. (a) Si $c=0$, nous savons que $d\neq 0$ et que $f:z\mapsto \dfrac{a}{d}z+\dfrac{b}{d}$ est définie sur $\mathbb{C}$. Pour montrer que c'est une bijection de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, on se donne $(z,\omega)\in\mathbb{C}^2$ et on résout l'équation :

$$f(z)=\omega \Leftrightarrow \frac{a}{d}z+\frac{b}{d}=\omega \Leftrightarrow z=\frac{w-\frac{b}{d}}{\frac{a}{d}} \Leftrightarrow z=\frac{d}{a}\omega-\frac{b}{a}$$

Ce calcul étant valable car si jamais $a=0$ alors sachant que $c=0$, on aurait $ad-bc=0$ ce que nous avons exclu.

$$\boxed{\text{si } c=0 \text{ alors } f \text{ est une bijection de } \mathbb{C} \text{ dans } \mathbb{C} \text{ et } f^{-1}:\omega\mapsto \frac{d}{a}\omega-\frac{b}{a}}$$

(b) On suppose que $c \neq 0$ et on tente également de résoudre l'équation pour $z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ -\dfrac{d}{c} \right\}$ et $\omega \in \mathbb{C}$:

$$f(z) = \omega \Leftrightarrow \frac{az+b}{cz+d} = \omega \Leftrightarrow az + b = (cz+d)\omega \Leftrightarrow z(a - c\omega) = d\omega - b$$

À ce moment du calcul, deux cas se présentent :

• si $\omega = \dfrac{a}{c}$ alors l'équation devient $0 = \dfrac{da}{c} - b$, c'est-à-dire $0 = da - bc$, ce qui est exclu, ainsi $\omega_0 = \dfrac{a}{c}$ n'a pas d'antécédent par f.

• en revanche pour $\omega \neq \dfrac{a}{c}$, il est possible de terminer le calcul précédent et nous obtenons $z = \dfrac{d\omega - b}{a - c\omega}$.

Ceci montre que f est une bijection de $\mathbb{C} \setminus \left\{ -\dfrac{d}{c} \right\}$ vers $\mathbb{C} \setminus \left\{ \dfrac{a}{c} \right\}$ et :

$$\boxed{\begin{array}{rccc} f^{-1} & : \mathbb{C} \setminus \left\{ \dfrac{a}{c} \right\} & \to & \mathbb{C} \setminus \left\{ -\dfrac{d}{c} \right\} \\ & \omega & \mapsto & \dfrac{d\omega - b}{a - c\omega} \end{array}}$$

4. Afin de trouver un point fixe, nous devons étudier l'équation $f(z) = z$. Distinguons deux cas :

• si $c = 0$, l'équation devient :

$$f(z) = z \Leftrightarrow az + b = dz \Leftrightarrow (a-d)z + b = 0$$

Si $a = d$ alors l'équation devient $b = 0$:

▶ si $b = 0$, comme $c = 0$ et $a = d$ alors $f = id_{\mathbb{C}}$ ce qui est exclu dans la question.

▶ si $b \neq 0$, alors $f(z) = z$ n'a aucune solution et il n'y a pas de point fixe.

• si $c \neq 0$, on a :

$$f(z) = z \Leftrightarrow az + b = z(cz+d) \Leftrightarrow cz^2 - az + dz - b = 0$$

C'est une équation de degré exactement 2 qui possède, d'après le cours, 1 ou 2 solutions, que l'on ne demande pas de trouver.

Nous avons traité les différents cas et en résumé :

$$\boxed{\text{une homographie différente de l'identité possède } 0, 1 \text{ ou } 2 \text{ points fixes}}$$

À titre d'exemple :

• $f : z \mapsto z + 1$ qui correspond au cas où $a = b = d = 1$ et $c = 0$ n'a clairement pas de point fixe.

• $f : z \mapsto 2z$ qui correspond au cas où $a = 2$, $b = 0$, $c = 0$ et $d = 1$ a pour unique point fixe 0.

• $f : z \mapsto \dfrac{1}{z}$ qui correspond au cas où $a = 0$, $b = 0$, $c = 1$ et $d = 0$ a deux points fixes 1 et -1. En effet, la résolution de l'équation $f(z) = z$, c'est-à-dire $\dfrac{1}{z} = z$ est immédiate.

B-Cas où $c = 0$ et $d = 1$: les similitudes directes

1. (a) Dans cette partie $c = 0$ ainsi nous avons forcément $a \neq 0$ car si $a = 0$ alors $ad - bc = 0$ ce qui est exclu d'après la partie A.

$$\boxed{f : z \mapsto az + b \quad \text{avec } a \neq 0}$$

   (b) Si $a = 1$, l'application $f : z \mapsto z + b$ est la représentation complexe de la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b. Dans le cas où $a \neq 1$, nous savons d'après le cours que f est la composée de la rotation de centre Ω d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1-a}$ et d'angle un argument de a et de l'homothétie de centre Ω et de rapport $|a|$.

2. (a) D'après le cours, la rotation de centre A d'affixe $a = -1 + 3i$ et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$ a pour écriture complexe :

$$r(z) = e^{i\frac{\pi}{6}}(z - a) + a = e^{i\frac{\pi}{6}}(z + 1 - 3i) - 1 + 3i$$

$$\boxed{r(z) = e^{i\frac{\pi}{6}}(z + 1 - 3i) - 1 + 3i}$$

   (b) D'après le cours, l'homothétie de centre B d'affixe $b = 1 + 2i$ et de rapport -2 a pour écriture complexe :

$$h(z) = -2(z - b) + b = -2(z - 1 - 2i) + 1 + 2i$$

$$\boxed{h(z) = -2(z - 1 - 2i) + 1 + 2i}$$

   (c) Voici les éléments caractéristiques de cette similitude directe :
   - le rapport vaut $|-2 + 2i| = 2\sqrt{2}$.
   - une mesure de l'angle de cette similitude est un argument de $-2 + 2i = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$, c'est-à-dire $\dfrac{3\pi}{4}$.
   - le centre de la similitude s'obtient par résolution de l'équation :

$$\begin{aligned}
\omega = (-2 + 2i)\omega + 5 + i \quad &\Leftrightarrow \quad \omega(1 + 2 - 2i) = 5 + i \\
&\Leftrightarrow \quad \omega = \frac{5 + i}{3 - 2i} \\
&\Leftrightarrow \quad \omega = \frac{(5 + i)(3 + 2i)}{13} \\
&\Leftrightarrow \quad \omega = 1 + i
\end{aligned}$$

$$\boxed{s \text{ est la similitude directe de centre } \Omega(1 + i),\ \text{d'angle } \frac{3\pi}{4},\ \text{de rapport } 2\sqrt{2}}$$

3. Soit $s : z \mapsto az + b$ une similitude avec $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $a \neq 1$. On suppose que z_1 et z_2 sont deux points fixes de s distincts. C'est-à-dire que :

$$\begin{cases} z_1 &= az_1 + b \\ z_2 &= az_2 + b \end{cases}$$

En retranchant les deux lignes, on a : $z_1 - z_2 = a(z_1 - z_2)$. Comme $z_1 \neq z_2$, on peut simplifier par $z_1 - z_2$ pour obtenir $a = 1$. Enfin, en reportant ceci dans l'une des égalités précédentes, on a : $b = 0$.

$$\boxed{\text{La seule similitude possédant deux points fixes est } f : z \mapsto z}$$

4. D'après la question 3. de la partie A, nous savons que s est bijective ainsi $z_{A'}$, $z_{B'}$ et $z_{C'}$ sont distincts car z_A, z_B et z_C le sont. Une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$ est égal à un argument de $\dfrac{z_{C'} - z_{A'}}{z_{B'} - z_{A'}}$, nous avons :

$$\frac{z_{C'} - z_{A'}}{z_{B'} - z_{A'}} = \frac{az_C + b - (az_A + b)}{az_B + b - (az_A + b)} = \frac{a(z_C - z_A)}{a(z_B - z_A)} = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$$

Or un argument de $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est égal à une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

$$\boxed{\text{Les similitudes directes préservent les angles orientés}}$$

C-Étude de l'inversion

1. (a) Montrons que $f(\mathbb{C}^*) = \mathbb{C}^*$ par double inclusion.

   - Soit $z \in \mathbb{C}^*$, on a clairement $f(z) = \dfrac{1}{z} \in \mathbb{C}^*$. D'où $f(\mathbb{C}^*) \subset \mathbb{C}^*$.
   - Réciproquement, si $\omega \in \mathbb{C}^*$, on a $f(\omega^{-1}) = \omega$ avec $\omega^{-1} \in \mathbb{C}^*$, ainsi $\mathbb{C}^* \subset f(\mathbb{C}^*)$.

   $$\boxed{f(\mathbb{C}^*) = \mathbb{C}^*}$$

   (b) Montrons que $f(\mathbb{U}_n) = \mathbb{U}_n$ par double inclusion.

   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{U}_n$. On a $\dfrac{1}{z}$ qui est également un élément de $\mathbb{U}_n$ car :

   $$\left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{z^n} = 1$$

   Ainsi $f(\mathbb{U}_n) \subset \mathbb{U}_n$.
   - Réciproquement, si $\omega \in \mathbb{U}_n$, on a :

   $$f\left(\frac{1}{\omega}\right) = \omega$$

   et $\dfrac{1}{\omega} \in \mathbb{U}_n$ avec le même calcul que ci-dessus. On en déduit que $\mathbb{U}_n \subset f(\mathbb{U}_n)$.

   $$\boxed{f(\mathbb{U}_n) = \mathbb{U}_n}$$

   (c) On a directement :

   $$f(\{1 + 2i, i\}) = \left\{\frac{1}{1 + 2i}, \frac{1}{i}\right\} = \left\{\frac{1 - 2i}{5}, -i\right\}$$

   $$\boxed{f(\{1 + 2i, i\}) = \left\{\frac{1 - 2i}{5}, -i\right\}}$$

(d) Allons un peu plus vite car il est évident que pour $z \in \mathbb{C}^*$, on a :

$$z \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \frac{1}{z} \in \mathbb{R}_+^*$$

$$\boxed{f(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}_+^*}$$

2. Il est ici intéressant de remarquer que f est une bijection de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}^*$ et $f^{-1} = f$.

(a) Avec cette remarque, nous avons :

$$f^{-1}(\{-1-4i, 4\}) = f(\{-1-4i, 4\}) = \left\{\frac{-1+4i}{17}, \frac{1}{4}\right\}$$

$$\boxed{f^{-1}(\{-1-4i, 4\}) = \left\{\frac{-1+4i}{17}, \frac{1}{4}\right\}}$$

(b) On peut répondre à cette question en rédigeant ainsi :

$$f^{-1}(\mathbb{U}) = \left\{z \in \mathbb{C}^*,\ \frac{1}{z} \in \mathbb{U}\right\} = \left\{z \in \mathbb{C}^*,\ \left|\frac{1}{z}\right| = 1\right\} = \{z \in \mathbb{C}^*,\ |z| = 1\} = \mathbb{U}$$

$$\boxed{f^{-1}(\mathbb{U}) = \mathbb{U}}$$

(c) On a :

$$f^{-1}(i\mathbb{R}) = \left\{z \in \mathbb{C}^*,\ \frac{1}{z} \in i\mathbb{R}\right\} = \left\{z \in \mathbb{C}^*,\ \exists b \in \mathbb{R}^*,\ \frac{1}{z} = ib\right\} = \left\{z \in \mathbb{C}^*,\ \exists b \in \mathbb{R}^*,\ z = i\frac{1}{b}\right\} = i\mathbb{R}^*$$

$$\boxed{f^{-1}(i\mathbb{R}) = i\mathbb{R}^*}$$

(d) Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$ et $z = a + ib$, on a :

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$$

Ainsi :

$$\mathrm{Re}(f)(z) > 0 \Leftrightarrow a > 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(f) > 0$$

On en déduit que :

$$\boxed{Re(f)^{-1}(\mathbb{R}_+^*) = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(z) > 0\}}$$

3. Il est clair que pour $z \in \mathbb{C}^*$ et $\omega \in \mathbb{C}^*$, on a :

$$f(z) = \omega \Leftrightarrow \frac{1}{z} = \omega \Leftrightarrow z = \frac{1}{\omega}$$

On en déduit que f est une bijection de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}^*$ et que :

$$\boxed{f^{-1} = f}$$

4. (a) L'application f réalise une bijection de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$, on en déduit que :

$$\boxed{f(\mathbb{R}^*) = \mathbb{R}^*}$$

De même, en reprenant la démarche de la question 2.(c), on obtient :

$$\boxed{f(i\mathbb{R}^*) = i\mathbb{R}^*}$$

(b) Considérons une droite dirigée par le vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ d'affixe z_u. Le point M d'affixe z appartient à cette droite privée de l'origine si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que $\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{u}$. Cette égalité se traduit par $z = \alpha z_u$ ce qui est équivalent à $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{1}{z_u} = \dfrac{1}{\alpha}\overline{z_u}$ ceci étant donné que $\dfrac{1}{z_u} = \overline{z_u}$ puisque $|z_u| = 1$. Nous avons démontré que l'image de la droite passant par l'origine et dirigée par $\overrightarrow{u}(z_u)$ est la droite passant par l'origine et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{v}(\overline{z_u})$.

$$\boxed{\text{L'image d'une droite passant par l'origine est un droite passant par l'origine}}$$

(c) i. Le point M d'affixe z appartient à la droite (AB) si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, c'est-à-dire si et seulement si $\dfrac{z-1}{1-i} \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire $((a+ib)-1) \times \dfrac{1+i}{2} \in \mathbb{R}$. La partie imaginaire de ce nombre complexe vaut $\dfrac{1}{2}\Big(b + a - 1) = 0$, ce qui équivaut bien à $b = 1 - a$.

$$\boxed{M(z = a+ib) \text{ appartient à } (AB) \text{ si et seulement si } b = 1-a}$$

ii. Pour calculer la distance proposée par l'énoncé, examinons pour $z = a + ib$ tel que $M(z) \in (AB)$:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{a+ib} - \frac{1-i}{2}\right|^2 &= \left|\frac{2-(a+ib)(1-i)}{2(a+ib)}\right|^2 \\
&= \left|\frac{1+i(-1+2a)}{2(a+ib)}\right|^2 \\
&= \frac{1+(2a-1)^2}{4(a^2+b^2)} \\
&= \frac{2-4a+4a^2}{4(a^2+(1-a)^2} \quad \text{en utilisant la relation } b = 1-a \\
&= \frac{2-4a+4a^2}{8a^2-8a+4} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\boxed{M'(f(z)) \text{ est à distance } \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ du point } C}$$

iii. On en déduit que l'image par f de la droite (AB) est incluse dans le cercle de centre C et de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Réciproquement, nous devons déterminer quels sont les points de ce cercle qui possèdent un antécédent appartenant à la droite (AB).

Remarquons déjà que ce cercle passe par l'origine du repère car $\left|\frac{1-i}{2}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Prenons $M'(\omega)$ un point du cercle qui n'est pas l'origine du repère (en effet il est évident que 0 n'a pas d'antécédent par f).

On a : $\left|\omega - \frac{1-i}{2}\right|^2 = \frac{1}{2}$. On multiplie par 2 et on développe le module au carré pour obtenir :

$$2\omega\overline{\omega} - (1+i)\omega - (1-i)\overline{\omega} + 1 = 1$$

On divise par $\omega\overline{\omega}$ qui est non nul car $\omega \neq 0$ pour obtenir :

$$2 - \frac{1+i}{\overline{\omega}} - \frac{1-i}{\omega} = 0$$

Posons $z = a + ib \in \mathbb{C}$ tel que $z = \frac{1}{\omega}$, nous obtenons :

$$2 - (1+i)\overline{z} - (1-i)z = 0$$

En utilisant la forme algébrique de z, en développant et en simplifiant, il vient $b = 1 - a$, ce qui est bien l'équation de la droite (AB). Ainsi, on a trouvé un antécédent de ω par f qui appartient à (AB). On conclut :

$$\boxed{\text{La droite } (AB) \text{ a pour image par } f \text{ le cercle de centre } C \text{ et de rayon } \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

5. (a) Les affixes des points du cercle de centre O et de rayon $r \in \mathbb{R}_+^*$ sont les nombres complexes de la forme $z = re^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$. Or :

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$$

Quand θ décrit $\mathbb{R}$, on a $-\theta$ qui décrit également $\mathbb{R}$. On reconnait à nouveau la description d'un cercle.

$$\boxed{\text{L'image du cercle de centre } O \text{ et de rayon } r \text{ est le cercle de centre } O \text{ et de rayon } \frac{1}{r}}$$

(b) i. Le cercle $\mathcal{C}_D$ est de rayon r. Les points du cercle sont exactement les points M d'affixe z tels que $DM = r$, ce qui se traduit avec le module par $|z - z_D| = r$, en élevant au carré cela donne :

$$\boxed{\text{L'équation du cercle de centre } C \text{ est } |z - z_D|^2 = r^2}$$

ii. On développe le module précédent :

$$|z - z_D|^2 = r^2 \Leftrightarrow (z - z_D)\overline{(z - z_D)} = r^2 \Leftrightarrow z\overline{z} - z_D\overline{z} - z\overline{z_D} + |z_D|^2 - r^2 = 0$$

$$\boxed{\text{L'équation du cercle est } z\overline{z} - z_D\overline{z} - z\overline{z_D} + |z_D|^2 - r^2 = 0}$$

iii. Dans ce cas particulier, l'équation précédente devient :

$$z\overline{z} - z_D\overline{z} - z\overline{z_D} = 0$$

On pose $Z = \dfrac{1}{z}$ afin d'appliquer l'inversion et en divisant par $z\overline{z}$ qui est non nul, on obtient :

$$1 - z_D Z - \overline{z_D Z} = 0$$

Ce qui équivaut à $1 = 2\mathrm{Re}(z_D Z)$. On pose $z_D = d_1 + id_2$ et $Z = x + iy$ avec $(d_1, d_2, x, y) \in \mathbb{R}^4$, il vient :

$$2d_1x - 2d_2y = 1$$

Ce qui est bien l'équation d'une droite ne passant pas par l'origine et toute droite ne passant pas par l'origine possède bien une équation de cette forme.

L'inclusion réciproque est vérifiée car f est une bijection de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}^*$:

$$\boxed{\text{l'image d'un cercle passant par l'origine est une droite ne passant pas par l'origine}}$$

iv. Pour simplifier, on note $k = |z_D|^2 - r^2$ ainsi dans cette question, l'équation du cercle $\mathcal{C}_D$ est :

$$z\overline{z} - z_D\overline{z} - z\overline{z_D} + k = 0$$

On divise également par $z\overline{z}$, z étant bien non nul et on pose $Z = \dfrac{1}{z}$ afin d'appliquer l'inversion. On obtient :

$$1 - z_D Z - \overline{z_D Z} + kZ\overline{Z} = 0$$

En réorganisant ceci, nous obtenons :

$$\left|Z - \frac{\overline{z_D}}{k}\right|^2 = k'$$

où k' est une nouvelle constante. Ceci est bien l'équation d'un cercle de centre d'affixe $\dfrac{\overline{z_D}}{k}$.

$$\boxed{\text{l'image d'un cercle ne passant pas par l'origine est un cercle}}$$

D-Exemples d'homographies

1. (a) Il s'agit de vérifier la condition de l'énoncé : $ad - bc \neq 0$. Pour h, on a $a = i$, $b = i$, $c = -1$ et $d = 1$ donc $ad - bc = i - (-i) = 2i \neq 0$.

$$\boxed{h \text{ est une homographie définie sur } \mathbb{C} \setminus \{1\}}$$

(b) Soit $z \in U \setminus \{1\}$, nous allons démontrer que $\overline{h(z)} = h(z)$, ce qui démontrera bien que $h(z) \in \mathbb{R}$ d'après la caractérisation d'un réel à l'aide du conjugué. La principale propriété que l'on va utiliser dans le calcul à venir est que pour tout $z \in U \setminus \{1\}$, $\dfrac{1}{z} = \overline{z}$ puisque $z\overline{z} = |z|^2 = 1$. Pour tout $z \in U \setminus \{1\}$:

$$\overline{h(z)} = \overline{\left(i\frac{1+z}{1-z}\right)} = \overline{i}\,\frac{\overline{1+z}}{\overline{1-z}} = -i\frac{1+\overline{z}}{1-\overline{z}} = \underbrace{-i\frac{1+\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}} = -i\frac{z+1}{z-1}}_{\text{on a multiplié par } \frac{z}{z}} = i\frac{z+1}{1-z} = h(z)$$

$$\boxed{\forall z \in U \setminus \{1\},\ h(z) \in \mathbb{R}}$$

(c) Donnons-nous pour cette question $z \in D$, il s'agit de démontrer que $h(z) \in P$, c'est-à-dire que $\mathcal{I}m(h(z)) > 0$. Pour cela, une méthode consiste à utiliser la forme algébrique de z, posons $z = x+iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Remarquons également que $z \neq 1$ puisque $|z| < 1$, ainsi le calcul de $h(z)$ a un sens. En multipliant le dénominateur par la quantité conjuguée, on a :

$$h(z) = i\frac{1+x+iy}{1-x-iy} = i\frac{(1+x+iy)(1-x+iy)}{(1-x)^2+y^2} = i\frac{1-x^2-y^2+2iy}{(1-x)^2+y^2} = \frac{1}{(1-x)^2+y^2}\Big(-2y+i(1-x^2-y^2)\Big)$$

Or par hypothèse $z \in D$, donc $|z| < 1$, ce qui implique que $|z|^2 = x^2+y^2 < 1$ ou encore $0 < 1-x^2-y^2$. Ceci permet de conclure puisque :

$$\mathcal{I}m(h(z)) = \frac{1-x^2-y^2}{(1-x)^2+y^2} > 0$$

$$\boxed{\forall z \in D,\ h(z) \in P}$$

(d) Soit z un nombre complexe différent de 1 :

$$\begin{aligned} h(z) = z \quad &\Leftrightarrow \quad i\frac{1+z}{1-z} = z \\ \text{''} \quad &\Leftrightarrow \quad i+iz = z-z^2 \text{ , cette équivalence est correcte car 1 n'est pas solution} \\ \text{''} \quad &\Leftrightarrow \quad z^2+(i-1)z+i = 0 \end{aligned}$$

On reconnaît une équation du second degré à coefficients complexes. Le discriminant de l'équation est $\Delta = (i-1)^2-4i = -6i$, on applique la méthode vue en cours pour trouver les racines. On recherche un nombre complexe δ tel que $\delta^2 = \Delta$ avec $\delta = x+iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on obtient de façon usuelle le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x^2-y^2 & = & 0 \\ 2xy & = & -6 \\ x^2+y^2 & = & 6 \end{array}\right.$$

Les équations 1 et 3 permettent de trouver $x^2 = 3$ et $y^2 = 3$ et l'équation 2 permet de dire que x et y sont de signes opposés. Ainsi, on peut choisir $\delta = \sqrt{3}-i\sqrt{3}$ et les deux solutions de l'équation du second de degré sont

$$z_1 = \frac{1+\sqrt{3}-i(1+\sqrt{3})}{2} \text{ et } z_2 = \frac{1-\sqrt{3}+i(-1+\sqrt{3})}{2}$$

$$\boxed{\text{Les solutions de l'équation } h(z) = z \text{ sont } \frac{1+\sqrt{3}-i(1+\sqrt{3})}{2} \text{ et } \frac{1-\sqrt{3}+i(-1+\sqrt{3})}{2}}$$

2. (a) Dans le cas de g, les coefficients sont $a = 1$, $b = -i$, $c = 1$ et $d = i$, ainsi $ad-bc = i-(-i) = 2i \neq 0$.

$$\boxed{g \text{ est une homographie définie sur } \mathbb{C} \setminus \{-i\}}$$

(b) Soit $z \in \mathbb{R}$, démontrons que $|g(z)|^2 = g(z)\overline{g(z)} = 1$ ainsi on aura bien $g(z) \in U$.

$$\begin{aligned} g(z)\overline{g(z)} &= \frac{z-i}{z+i} \times \frac{\overline{z}+i}{\overline{z}-i} \\ &= \frac{z-i}{z+i} \times \frac{z+i}{z-i} \quad \text{car } z \text{ est réel donc } z = \overline{z} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{R},\ g(z) \in U}$$

(c) Soit $z \in P$, c'est-à-dire que $\mathcal{I}m(z) > 0$, on doit démontrer que $|g(z)| < 1$. Pour cela, on effectue le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
g(z)\overline{g(z)} &= \frac{z-i}{z+i} \times \frac{\overline{z}+i}{\overline{z}-i} \\
&= \frac{z\overline{z}+1+i(z-\overline{z})}{z\overline{z}+1+i(\overline{z}-z)} \\
&= \frac{z\overline{z}+1+i(2i\mathcal{I}m(z))}{z\overline{z}+1-i(2i\mathcal{I}m(z))} \quad \text{car } z-\overline{z} = 2i\mathcal{I}m(z) \\
&= \frac{z\overline{z}+1-2\mathcal{I}m(z)}{z\overline{z}+1+2\mathcal{I}m(z)} < 1
\end{aligned}$$

Ce quotient est inférieur à 1 puisque $z\overline{z}+1-2\mathcal{I}m(z) < z\overline{z}+1+2\mathcal{I}m(z)$ car $\mathcal{I}m(z) > 0$. Finalement, on a démontré que $g(z)\overline{g(z)} = |g(z)|^2 < 1$ donc $|g(z)| < 1$.

$$\boxed{\forall z \in P,\ g(z) \in D}$$

3. (a) La fonction f peut se réécrire $f : z \mapsto \dfrac{-iz-2}{z+4i}$. Ses coefficients sont $a = -i$, $b = -2$, $c = 1$ et $d = 4i$, on a : $-i \times 4i - (-2) \times 1 = 6 \neq 0$.

$$\boxed{f \text{ est une homographie définie sur } \mathbb{C} \setminus \{-4i\}}$$

(b) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-4i\}$. Remarquons que $f(z) = 0$ si et seulement si $z = 2i$. Ainsi pour $z = 2i$, $f(z)$ est réel. Excluons ce cas par la suite puisque l'on va se servir d'un argument de $f(z)$:

$$\begin{aligned}
f(z) \in \mathbb{R}^* &\Leftrightarrow \arg(f(z)) = 0\ [\pi] \\
\text{''} \quad &\Leftrightarrow \arg\Big(-i\frac{z-2i}{z+4i}\Big) = 0\ [\pi] \\
\text{''} \quad &\Leftrightarrow \arg(-i) + \arg\Big(\frac{z-2i}{z+4i}\Big) = 0\ [\pi] \\
\text{''} \quad &\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + \arg\Big(\frac{z-2i}{z+4i}\Big) = 0\ [\pi] \\
\text{''} \quad &\Leftrightarrow \arg\Big(\frac{z-2i}{z+4i}\Big) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]
\end{aligned}$$

Notons A le point d'affixe $2i$, B le point d'affixe $-4i$ et M le point d'affixe z. D'après la relation vue en cours entre argument et angle, on a :

$$f(z) \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg\Big(\frac{z-2i}{z+4i}\Big) = \frac{\pi}{2}\ [\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) = \frac{\pi}{2}\ [\pi] \text{ avec } M \neq A \text{ et } M \neq B$$

La condition $M \neq A$ vient du fait que l'on a exclu le cas $z = 2i$ au début du calcul et la condition $M \neq B$ vient du fait que la fonction f n'est pas définie en $z = -4i$.

C'est équivalent à dire que M décrit le cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et de B. On doit pour finir l'étude ajouter le point A à l'ensemble recherché puisque si $z = 2i$ alors $f(z) = 0$ qui est bien un nombre réel.

$$\boxed{\text{Le lieu géométrique recherché est le cercle de centre } -i \text{ et de rayon 3 privé de } B}$$

(c) On procède de même qu'à la question précédente, en prenant $z \in \mathbb{C} \setminus \{-4i, 2i\}$:

$$\begin{aligned}
\arg(f(z)) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \quad &\Leftrightarrow \quad \arg\Big(-i\frac{z-2i}{z+4i}\Big) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \\
\text{''} \qquad &\Leftrightarrow \quad -\frac{\pi}{2} + \arg\Big(\frac{z-2i}{z+4i}\Big) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \\
\text{''} \qquad &\Leftrightarrow \quad \arg\Big(\frac{z-2i}{z+4i}\Big) = \pi\ [2\pi]
\end{aligned}$$

On reprend les mêmes notations qu'à la question précédente en posant M d'affixe z, A d'affixe $2i$ et B d'affixe $-4i$. La dernière égalité obtenue équivaut à dire que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ ont la même direction et un sens opposé. C'est équivalent à $M \in]AB[$, en se souvenant que l'on a exclu au départ les cas $M = A$ et $M = B$.

$$\boxed{\text{Le lieu recherché est le segment ouvert }]AB[}$$

E-Le birapport

1. (a) i. Si A, B, C et D sont alignés alors ils se situent sur une même droite engendrée par un vecteur non nul $\vec{u}$ d'affixe $u \in \mathbb{C}^*$. Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires au vecteur $\vec{u}$, c'est-à-dire qu'il existe $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tels que :

$$a - c = \alpha u,\ a - d = \beta u,\ b - d = \gamma u \text{ et } b - c = \delta u$$

De plus, il est possible de prendre α, β, γ et δ non nuls car A, B, C et D sont supposés distincts.

$$\boxed{\exists u \in \mathbb{C}^*,\ \exists(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in (\mathbb{R}^*)^4,\ a - c = \alpha u,\ a - d = \beta u,\ b - d = \gamma u \text{ et } b - c = \delta u}$$

ii. D'après la définition du birapport et en utilisant la question précédente, nous avons :

$$[A : B : C : D] = \frac{a-c}{a-d} \times \frac{b-d}{b-c} = \frac{\alpha u}{\beta u} \times \frac{\gamma u}{\delta u} = \frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\gamma}{\delta} \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{\text{Lorsque } A, B, C \text{ et } D \text{ sont alignés, le birapport est réel}}$$

(b) i. Comme A, B, C et D sont sur le cercle de centre Ω et de rayon R, on a : $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D = R$. En d'autres termes, les vecteurs $\overrightarrow{\Omega A}$, $\overrightarrow{\Omega B}$, $\overrightarrow{\Omega C}$ et $\overrightarrow{\Omega D}$ sont de normes R ainsi il existe $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) \in \mathbb{R}^4$ tels que :

$$a - w = Re^{i\theta_1},\ b - w = Re^{i\theta_2},\ c - w = Re^{i\theta_3},\ d - w = Re^{i\theta_4}$$

C'est le résultat voulu :

$$\boxed{\exists(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) \in \mathbb{R}^4,\ a = \omega + Re^{\theta_1},\ b = \omega + Re^{i\theta_2},\ c = \omega + Re^{i\theta_3} \text{ et } d = \omega + Re^{i\theta_4}}$$

ii. D'après la question précédente et la définition du birapport, on a :

$$[A:B:C:D] = \frac{a-c}{a-d} \times \frac{b-d}{b-c} = \frac{\omega + Re^{i\theta_1} - \omega - Re^{i\theta_3}}{\omega + Re^{i\theta_1} - \omega - Re^{i\theta_4}} \times \frac{\omega + Re^{i\theta_2} - \omega - Re^{i\theta_4}}{\omega + Re^{i\theta_2} - \omega - Re^{i\theta_3}} = \frac{e^{i\theta_1} - e^{i\theta_3}}{e^{i\theta_1} - e^{i\theta_4}} \times \frac{e^{i\theta_2} - e^{i\theta_4}}{e^{i\theta_2} - e^{i\theta_3}}$$

Pour simplifier ceci, on utilise la technique de l'angle moitié :

$$[A:B:C:D] = \frac{e^{i\frac{\theta_1+\theta_3}{2}} 2i\sin\left(\frac{\theta_1-\theta_3}{2}\right)}{e^{i\frac{\theta_1+\theta_4}{2}} 2i\sin\left(\frac{\theta_1-\theta_4}{2}\right)} \times \frac{e^{i\frac{\theta_2+\theta_4}{2}} 2i\sin\left(\frac{\theta_2-\theta_4}{2}\right)}{e^{i\frac{\theta_2+\theta_3}{2}} 2i\sin\left(\frac{\theta_2-\theta_3}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\theta_1-\theta_3}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_1-\theta_4}{2}\right)} \times \frac{\sin\left(\frac{\theta_2-\theta_4}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_2-\theta_3}{2}\right)} \in \mathbb{R}$$

Dans ce calcul, les différents dénominateurs ne sont pas nuls car $a \neq d$ et $b \neq c$.

$$\boxed{\text{Lorsque } A, B, C \text{ et } D \text{ sont cocycliques, le birapport est réel}}$$

2. (a) D'après l'énoncé, on a $f_0 : z \mapsto i\dfrac{1+z}{1-z}$ définie sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Transformons l'expression de f_0 :

$$f_0(z) = i\frac{(1+z)(1-\overline{z})}{|1-z|^2} = i\frac{1+2i\mathrm{Im}(z) - |z|^2}{|1-z|^2}$$

La partie imaginaire de $f_0(z)$ vaut donc $\dfrac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$. Ainsi pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, nous avons :

$$f_0(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f(z)) = 0 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow z \in \mathbb{U}$$

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\},\ z \in \mathbb{U} \Leftrightarrow f_0(z) \in \mathbb{R}}$$

(b) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{e^{i\theta}\}$, on a $f_\theta(z)$ qui est bien définie et $e^{-i\theta}z \neq 1$ donc $f_0(e^{-i\theta}z)$ existe. On a :

$$f_\theta(z) = i\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} = i\frac{1+e^{-i\theta}z}{1-e^{-i\theta}z} = f_0(e^{-i\theta}z)$$

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{e^{i\theta}\},\ f_\theta(z) = f_0(e^{-i\theta}z)}$$

(c) Pour $\theta \in \mathbb{C} \setminus \{e^{i\theta}\}$, en utilisant la question précédente, on a :

$$f_\theta(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f_0(e^{-i\theta}z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow e^{-i\theta}z \in \mathbb{U} \Leftrightarrow z \in \mathbb{U}$$

ceci car $e^{-i\theta}$ est lui-même un nombre complexe de module 1.

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{e^{i\theta}\},\ z \in \mathbb{U} \Leftrightarrow f_\theta(z) \in \mathbb{R}}$$

(d) Pour $(a,b,c,d) \in (\mathbb{C}\setminus\{1\})^4$ distincts, on utilise la définition du birapport :

$$\begin{aligned}
[f_0(a):f_0(b):f_0(c):f_0(d)] &= \frac{i\left(\frac{1+a}{1-a}\right)-i\left(\frac{1+c}{1-c}\right)}{i\left(\frac{1+a}{1-a}\right)-i\left(\frac{1+d}{1-d}\right)} \times \frac{i\left(\frac{1+b}{1-b}\right)-i\left(\frac{1+d}{1-d}\right)}{i\left(\frac{1+b}{1-b}\right)-i\left(\frac{1+c}{1-c}\right)} \\
&= \frac{\left(-1+\frac{2}{1-a}\right)-\left(-1+\frac{2}{1-c}\right)}{\left(-1+\frac{2}{1-a}\right)-\left(-1+\frac{2}{1-d}\right)} \times \frac{\left(-1+\frac{2}{1-b}\right)-\left(-1+\frac{2}{1-d}\right)}{\left(-1+\frac{2}{1-b}\right)-\left(-1+\frac{2}{1-c}\right)} \qquad (\bigstar) \\
&= \frac{\frac{1}{1-a}-\frac{1}{1-c}}{\frac{1}{1-a}-\frac{1}{1-d}} \times \frac{\frac{1}{1-b}-\frac{1}{1-d}}{\frac{1}{1-b}-\frac{1}{1-c}} \\
&= \frac{(1-c)(1-d)-(1-a)(1-d)}{(1-c)(1-d)-(1-a)(1-c)} \times \frac{(1-d)(1-c)-(1-b)(1-c)}{(1-c)(1-d)-(1-b)(1-d)} \\
&= \frac{(1-c)-(1-a)}{(1-d)-(1-a} \times \frac{(1-d)-(1-b)}{(1-c)-(1-b)} \\
&= \frac{a-c}{a-d} \times \frac{b-d}{b-c} \\
&= [a:b:c:d]
\end{aligned}$$

$(\bigstar)$ En effet, pour $t \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$, on a :

$$\frac{1+t}{1-t} = \frac{-1+t+2}{1-t} = \frac{-1+t}{1-t} + \frac{2}{1-t} = -1 + \frac{2}{1-t}$$

$$\boxed{f_0 \text{ préserve le birapport}}$$

(e) Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $(a,b,c,d) \in (\mathbb{C}\setminus\{e^{i\theta}\})^4$ distincts, on a en utilisant la question précédente :

$$[f_\theta(a):f_\theta(b):f_\theta(c):f_\theta(d)] = [f_0(e^{-i\theta}a):f_0(e^{-i\theta}b):f_0(e^{-i\theta}c):f_0(e^{-i\theta}d)] = [e^{-i\theta}a:e^{-i\theta}b:e^{-i\theta}c:e^{-i\theta}d] = [a:b:c:d]$$

La dernière égalité étant évidente à démontrer avec la définition du birapport.

$$\boxed{\text{Pour tout } \theta \in \mathbb{R},\ f_\theta \text{ préserve le birapport}}$$

3. (a) Comme A, B et C sont alignés avec le même raisonnement que dans la question 1.(a), on sait qu'il existe $u \in \mathbb{C}^*$ et $(\alpha,\beta) \in (\mathbb{R}^*)^2$ tels que :

$$a-c = \alpha u \text{ et } b-c = \beta u$$

Ainsi le birapport devient :

$$[a:b:c:d] = \frac{\alpha u}{a-d} \times \frac{b-d}{\beta u} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{b-d}{a-d}$$

D'après l'hypothèse de la question, on a $[a:b:c:d] \in \mathbb{R}$ et on sait que $\dfrac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{R}$, on en déduit que $\dfrac{b-d}{a-d} \in \mathbb{R}$. Or $b-d$ est l'affixe de $\overrightarrow{DB}$ et $a-d$ est l'affixe de $\overrightarrow{DA}$ ainsi on sait que $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DA}$ sont colinéaires. Finalement :

$$\boxed{A,\ B,\ C \text{ et } D \text{ sont alignés}}$$

(b) i. On suppose A, B et C non alignés. Les médiatrices de $[AB]$ et $[AC]$ se coupent en un point Ω. Le cercle de centre Ω et de rayon $r = \Omega A \in \mathbb{R}_+^*$ contient les points A, B et C. C'est d'ailleurs le cercle circonscrit au triangle ABC.

$$\boxed{\text{trois points non alignés sont cocycliques}}$$

ii. Le point M d'affixe z appartient au cercle de centre $\Omega(\omega)$ et de rayon r si et seulement si $\Omega M = r$ ce qui est équivalent à l'existence de $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z - \omega = re^{i\theta}$. Ainsi, pour $z \in \mathbb{C}$:

$$z \in \mathcal{C} \Leftrightarrow z - \omega = re^{i\theta} \Leftrightarrow \frac{z-\omega}{r} = e^{i\theta} \Leftrightarrow h(z) = e^{i\theta} \Leftrightarrow h(z) \in \mathbb{U}$$

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C},\ z \in \mathcal{C} \Leftrightarrow h(z) \in \mathbb{U}}$$

iii. C'est un calcul direct, pour $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$ distincts, remarquons que $h(a)$, $h(b)$, $h(c)$ et $h(d)$ sont distincts car h est bijective et :

$$\begin{aligned}
[h(a) : h(b) : h(c) : h(d)] &= \frac{h(a)-h(c)}{h(a)-h(d)} \times \frac{h(b)-h(d)}{h(b)-h(c)} \\
&= \frac{\frac{a-\omega}{r} - \frac{c-\omega}{r}}{\frac{a-\omega}{r} - \frac{d-\omega}{r}} \times \frac{\frac{b-\omega}{r} - \frac{d-\omega}{r}}{\frac{b-\omega}{r} - \frac{c-\omega}{r}} \\
&= \frac{a-\omega-(c-\omega)}{a-\omega-(d-\omega)} \times \frac{b-\omega-(d-\omega)}{b-\omega-(c-\omega)} \\
&= \frac{a-c}{a-d} \times \frac{b-d}{b-c} \\
&= [a : b : c : d]
\end{aligned}$$

$$\boxed{h \text{ préserve le birapport}}$$

iv. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $e^{i\theta}$ soit différent de $h(a)$, $h(b)$, $h(c)$ et $h(d)$. En utilisant les questions 2.(c) et 3.(b)ii., on a :

$$z \in \mathcal{C} \Leftrightarrow h(z) \in \mathbb{U} \Leftrightarrow f_\theta(h(z)) \in \mathbb{R}$$

En particulier, montrer que D appartient à $\mathcal{C}$ est équivalent à démontrer que $f_\theta(h(d)) \in \mathbb{R}$. Or :

$$[f_\theta(h(a)) : f_\theta(h(b)) : f_\theta(h(c)) : f_\theta(h(d))] = [h(a) : h(b) : h(c) : h(d)] = [a : b : c : d] \in \mathbb{R}$$

En utilisant le fait que f_θ et h préservent le birapport.
Enfin, on sait que les images des complexes $f_\theta(a)$, $f_\theta(b)$ et $f_\theta(c)$ sont alignées sur l'axe réel, on en déduit d'après la question 3.(a) que $f_\theta(d)$ est également réel ce qui donne bien que D appartient au cercle $\mathcal{C}$.

$$\boxed{A,\ B,\ C \text{ et } D \text{ sont cocycliques}}$$

v. Finalement, nous avons démontré que si le birapport est réel alors A, B, C et D sont alignés ou cocycliques. En utilisant la question 1., nous avons démontré l'équivalence :

$$\boxed{[A : B : C : D] \in \mathbb{R} \Leftrightarrow A, B, C \text{ et } D \text{ sont alignés ou cocycliques}}$$

(c) Commençons par mettre de côté les cas où ces complexes ne sont pas distincts :

- il y a le cas où $1 = z$.
- si $1 = \frac{1}{z}$ alors on retrouve $z = 1$.
- si $1 = 1 - z$ alors $z = 0$.
- si $z = \frac{1}{z}$ alors $z = 1$ ou $z = -1$.
- si $z = 1 - z$ alors on trouve $z = \frac{1}{2}$.
- si $\frac{1}{z} = 1 - z$ alors $z^2 - z + 1 = 0$ et après résolution cela donne : $z = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

Finalement si $z \in \left\{0, 1, -1, \frac{1}{2}, \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right\}$, alors les points ne sont pas tous distincts et on exclut ce cas dans la suite.

Examinons le birapport :

$$\left[1 : z : \frac{1}{z} : 1 - z\right] = \frac{1 - \frac{1}{z}}{1 - (1 - z)} \times \frac{z - (1 - z)}{z - \frac{1}{z}} = \frac{2z - 1}{z(z + 1)}$$

Regardons la partie imaginaire de ce complexe en posant $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\frac{2z-1}{z(z+1)} = \frac{2(x+iy)-1}{(x+iy)(x+1+iy)} = \frac{2x-1+2iy}{x(x+1)-y^2+i(xy+y(x+1))} = \frac{(2x-1+2iy)(x(x+1)-y^2-i(xy+y(x+1)))}{|x(x+1)-y^2+i(xy+y(x+1))|^2}$$

En développant, le numérateur a une partie imaginaire qui vaut $y(2x(x+1) - 2y^2 - (2x-1)(2x+1))$ et le dénominateur est un réel. Après, ces calculs préliminaires, on peut mettre en place une analyse-synthèse.

- **Analyse.** On suppose que ces quatre points cocycliques, on sait que le birapport est alors réel. D'après le calcul précédent, nous avons donc :

$$y(2x(x+1) - 2y^2 - (2x-1)(2x+1)) = 0$$

Ce qui nous apprend que $y = 0$ ou $2x^2 + 2x - 2y^2 - 4x^2 + 1 = 0$. Cette dernière égalité se réécrit $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{3}{4}$.

Ces deux conditions, nous apprennent que $M(z)$ est situé sur l'axe réel ou sur le cercle de centre $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{3}}{2}$, notons $\mathcal{C}$ ce cercle.

- **Synthèse.** Si z est réel, il est clair que 1, z, $\frac{1}{z}$ et $1 - z$ sont des réels ainsi les quatre points sont alignés et non cocycliques. Si $M(z)$ appartient au cercle $\mathcal{C}$ alors $M'(1 - z)$ également car M' est le symétrique de M par rapport au point d'affixe $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$. Ainsi les images des complexes z, $1 - z$ et $\frac{1}{2}$ sont alignées. On en déduit que z, $1 - z$ et 1 ne peuvent pas être alignés sauf si z est réel : ce cas-là concerne uniquement les complexes $\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$ qui sont les seuls points sur l'axe réel et sur le cercle. Si les points z, $1 - z$ et 1 ne sont pas alignés, comme le birapport de z, $1 - z$, $\frac{1}{z}$ et 1 est réel alors ces quatre points sont cocycliques.

- **Bilan.** Les points 1, z, $\frac{1}{z}$, $1 - z$ sont cocycliques si et seulement si z appartient au cercle de centre $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{3}}{2}$ privé des points $\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$.