Soit $b \in \mathbb{R}$. Trouver toutes les solutions non nulles définies sur $\mathbb{R}$ du problème :

$$\begin{cases} y'' + by = 0 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

Soit $b \in \mathbb{R}$. Trouver toutes les solutions non nulles définies sur $\mathbb{R}$ du problème :

$$\begin{cases} y'' + by = 0 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

Réponse : L'équation caractéristique s'écrit $X^2 + b = 0$, il y a trois cas selon le signe de b :

• Si $b > 0$, l'équation caractéristique possède deux solutions complexes conjuguées : $X_1 = i\sqrt{b}$ et $X_2 = -i\sqrt{b}$, dans ce cas les solutions sont les fonctions :

$$x \mapsto A\cos(\sqrt{b}x) + B\sin(\sqrt{b}x),\ (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

Tenons compte à présent des conditions initiales.

$$\left\{\begin{array}{lcl} y(0) & = & 0 \\ y(1) & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} A & = & 0 \\ A\cos(\sqrt{b}) + B\sin(\sqrt{b}) & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} A & = & 0 \\ B\sin(\sqrt{b}) & = & 0 \end{array}\right.$$

On cherche des solutions non nulles à cette équation. Comme on a nécessairement $A = 0$, il faut que B soit non nul afin d'avoir une solution non nulle à cette équation et dans ce cas $\sin(\sqrt{b}) = 0$, on a :

$$\sin(\sqrt{b}) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ \sqrt{b} = k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ b = k^2\pi^2$$

Dans ce cas, on a une solution non nulle définie sur $\mathbb{R}$ par $y : x \mapsto B\sin(k\pi x)$ où $k \in \mathbb{Z}^*$ et $B \in \mathbb{R}^*$.

• Si $b = 0$, l'équation devient $y'' = 0$ ainsi l'ensemble des solutions est :

$$x \mapsto Ax + B \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

Avec les conditions initiales, on a :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y(0) & = & 0 \\ y(1) & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} B & = & 0 \\ A + B & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} A & = & 0 \\ B & = & 0 \end{array} \right.$$

Dans ce cas, seule la fonction nulle vérifie ces conditions.

• Si $b < 0$, l'équation caractéristique possède deux racines réelles : $X_1 = \sqrt{-b}$ et $X_2 = -\sqrt{-b}$ dans ce cas l'ensemble des solutions est :

$$x \mapsto Ae^{\sqrt{-b}x} + Be^{-\sqrt{-b}x}, \qquad (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

On a :

$$\left\{\begin{array}{ccc} y(0) & = & 0 \\ y(1) & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} A+B & = & 0 \\ Ae^{\sqrt{-b}} + Be^{-\sqrt{-b}} & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} B & = & -A \\ 2A\mathrm{sh}(\sqrt{-b}) & = & 0 \end{array}\right.$$

La fonction sh s'annule uniquement en 0, or dans ce cas $b \neq 0$ ainsi $2A\mathrm{sh}(\sqrt{-b}) = 0$ implique que $A = 0$ et par suite $B = 0$. Toutes les solutions trouvées sont nulles.

En résumé, les seules solutions non nulles du problème initial sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y : x \mapsto B\sin(k\pi x)$ où $k \in \mathbb{Z}^*$ et $B \in \mathbb{R}^*$.