1-Soit f la fonction sinus définie de $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$ dans $\mathbb{R}$. Expliciter $\mathrm{Im}(f)$.

2. Vrai ou faux : pour une application injective $f : E \to F$ tout élément de E a au plus une image par f.

3. Soient X et Y deux ensembles finis. Vrai ou faux : si $f : X \to Y$ est injective alors X possède moins d'éléments que Y.

4. Soient X et Y deux ensembles finis. Vrai ou faux : si X possède moins d'éléments que Y alors toute application de X dans Y est injective.

5. Vrai ou faux : une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui n'est pas monotone ne peut pas être injective.

6. Soit $f : x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$ et $g : x \mapsto \ln(x)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Comment restreindre $f \circ g$ pour quelle soit bien définie ? Même question pour $g \circ f$.

1. Soit f la fonction sinus définie de $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$ dans $\mathbb{R}$. Expliciter $\mathrm{Im}(f)$.

Réponse : Il s'agit de déterminer l'ensemble des valeurs prises par cette fonction. La fonction sinus est strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$ ainsi :

$$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \leq \sin(x) \leq \left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

De plus, étant donné que la fonction f est continue, toutes les valeurs entre $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}$ vont être prises.

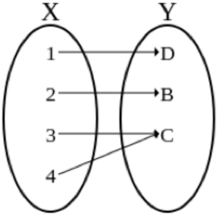
$$\mathrm{Im}(f) = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

2. Vrai ou faux : pour une application injective $f : E \to F$ tout élément de E a au plus une image par f.

Réponse : C'est vrai, mais cela n'a aucun rapport avec l'injectivité. Quelque soit l'application f, tout élément de E a toujours exactement une image par f.

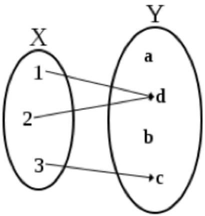
3. Soient X et Y deux ensembles finis. Vrai ou faux : si $f : X \to Y$ est injective alors X possède moins d'éléments que Y.

Réponse : C'est vrai. Examinons la contraposée : on comprend intuitivement que si X a plus d'éléments que Y alors nécessairement l'un des éléments de F aura au moins deux antécédents et l'application ne sera pas injective.



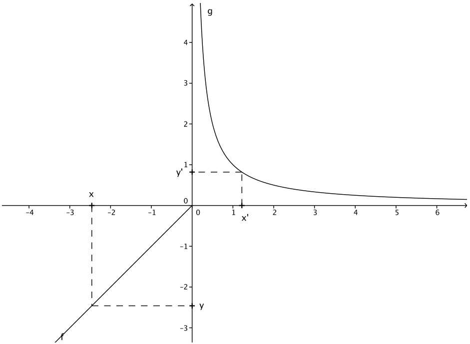
4. Soient X et Y deux ensembles finis. Vrai ou faux : si X possède moins d'éléments que Y alors toute application de X dans Y est injective.

Réponse : C'est faux, voici un contre-exemple :



5. Vrai ou faux : une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui n'est pas monotone ne peut pas être injective.

Réponse : C'est faux, voici un contre-exemple :



6. Soit $f : x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$ et $g : x \mapsto \ln(x)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Comment restreindre $f \circ g$ pour quelle soit bien définie ? Même question pour $g \circ f$.

Réponse : • On a $f(g(x)) = \sqrt{\ln(x)}$ définie pour $x \geq 1$ afin que $\ln(x) \geq 0$. Ainsi $(f \circ g)_{|_{[1,+\infty[}}$ est bien définie.

• On a $g(f(x)) = \ln(\sqrt{x})$ définie pour $x > 0$ afin que $\sqrt{x} > 0$. La fonction $(g \circ f)_{|_{\mathbb{R}_+^*}}$ est bien définie.