1-Vrai ou faux : $\mathbb{R}$ muni de la division est un magma.

2-Vrai ou faux : dans le magma $(\mathbb{R}, +)$, l'ensemble des irrationnels est une partie stable.

3-Soit E un ensemble muni d'une l.c.i $\star$. On dit que $e \in E$ est un élément neutre pour $\star$ si et seulement si :

$$\forall a \in E,\ a \star e = e \star a = a$$

Montrer que le magma $(E, \star)$ admet au plus un élément neutre.

4-Donner une l.c.i sur $\mathbb{N}^*$ non associative et non commutative.

5-Montrer que l'opération $\star$ définie ci-dessous est une loi de composition interne sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R} \setminus \{1\})^2,\ x \star y = x + y - xy$$

6-Montrer que la suite définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(k)$ pour $n \in \mathbb{N}$ est bornée.

1-Vrai ou faux : $\mathbb{R}$ muni de la division est un magma.

Réponse : Ce n'est pas un magma car $x \div y$ n'a pas de sens si $y = 0$.

2-Vrai ou faux : dans le magma $(\mathbb{R}, +)$, l'ensemble des irrationnels est une partie stable.

Réponse : C'est faux car $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ sont des irrationnels, pourtant leur somme n'est pas un irrationnel.

3-Soit E un ensemble muni d'une l.c.i $\star$. On dit que $e \in E$ est un élément neutre pour $\star$ si et seulement si :

$$\forall a \in E,\ a \star e = e \star a = a$$

Montrer que le magma $(E, \star)$ admet au plus un élément neutre.

Réponse : Supposons que e et e' soient deux éléments neutres de $\star$. On a :

$$e \star e' = e \text{ car } e' \text{ est un élément neutre}$$

$$\text{et : } e \star e' = e' \text{ car } e \text{ est un élément neutre}$$

Finalement $e = e'$, ce qui démontre qu'une l.c.i a au plus un élément neutre.

4-Donner une l.c.i sur $\mathbb{N}^*$ non associative et non commutative.

Réponse : Pour tout $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on pose :

$$a \star b = a^b$$

- On a : $2 \star 3 = 2^3 = 8 \neq 9 = 3^2 = 3 \star 2$ donc $\star$ n'est pas commutative.
- On a :

$$2 \star (1 \star 3) = 2 \star (1^3) = 2^1 \text{ et } (2 \star 1) \star 3 = 2^1 \star 3 = 2 \star 3 = 8$$

Ce qui démontre que $\star$ n'est pas associative.

5-Montrer que l'opération $\star$ définie ci-dessous est une loi de composition interne sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R} \setminus \{1\})^2,\ x \star y = x + y - xy$$

Réponse : • Soient $(x, y) \in (\mathbb{R} \setminus \{1\})^2$, nous devons démontrer que $x \star y \neq 1$. On a :

$$x \star y = 1 \Leftrightarrow x + y - xy = 1 \Leftrightarrow x + y - xy - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(1-y) = 0$$

Ce qui montre que $x \star y \neq 1$ étant donné que $x \neq 1$ et $y \neq 1$.