1-Sous réserve d'existence donner la dérivée de $h \circ g \circ f$.

2-Sous réserve d'existence donner la dérivée seconde et la dérivée troisième de $g \circ f$.

3-Donner un exemple de fonctions f et g telles que $g \circ f$ dérivable en a mais f non dérivable en a.

4-Donner l'ensemble de dérivabilité et la dérivée de la bijection réciproque de th.

1-Sous réserve d'existence donner la dérivée de $h \circ g \circ f$.

Réponse : On a :

$$(h \circ g \circ f)' = (g \circ f)' \times (h' \circ g \circ f) = f' \times (g' \circ f) \times (h' \circ g \circ f)$$

2-Sous réserve d'existence donner la dérivée seconde et la dérivée troisième de $g \circ f$.

Réponse : On a $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$, en dérivant il vient :

$$f'' \times (g' \circ f) + f' \times (g' \circ f)' = f'' \times (g' \circ f) + (f')^2 \times (g'' \circ f)$$

On dérive à nouveau :$(g \circ f)^{(3)} =$

$$f^{(3)} \times (g' \circ f) + f'' \times f' \times (g'' \circ f) + 2f'' \times f' \times (g'' \circ f) + (f')^3 \times (g^{(3)} \circ f)$$

$$= f^{(3)} \times (g' \circ f) + 3f'' \times f' \times (g'' \circ f) + (f')^3 \times (g^{(3)} \circ f)$$

3-Donner un exemple de fonctions f et g telles que $g \circ f$ dérivable en a mais f non dérivable en a.

Réponse : On pose $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et g la fonction nulle. La fonction f n'est pas dérivable en $a = 0$ pourtant $g \circ f$ est dérivable en 0.

5-Donner l'ensemble de dérivabilité et la dérivée de la bijection réciproque de th.

Réponse : La fonction th est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, c'est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{th}'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} = 1 - \mathrm{th}^2(x)$$

La dérivée ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ ainsi la bijection réciproque de th, notée Argth est définie et dérivable sur $]-1,1[$. De plus :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \mathrm{Argth}'(y) = \frac{1}{1-\mathrm{th}^2(\mathrm{Argth}(y))} = \frac{1}{1-y^2}$$

6) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ calculer la dérivée n-ième de $g : t \mapsto t^{n-1}\ln(t)$.

Réponse : La fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On applique la formule de Leibniz avec $u : t \mapsto t^{n-1}$ et $v : t \mapsto \ln(t)$ qui sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, les dérivées successives de u et v se calculent en intuitant une formule que l'on démontre par récurrence, on a :

$$
\begin{aligned}
g^{(n)}(t) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}(t) v^{(n-k)}(t) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!} t^{n-1-k} \frac{(-1)^{n-k-1}(n-k-1)!}{t^{n-k}} + 0 \times \ln(t) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^{n-k-1} \frac{(n-1)!}{t} \\
&= \frac{(n-1)!}{t} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k-1} - (-1)^{-1} \\
&= \frac{(n-1)!}{t} \left(-\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} + 1 \right) = \frac{(n-1)!}{t} ((1-1)^n + 1) \\
&= \frac{(n-1)!}{t}
\end{aligned}
$$