Nombres complexes

Premiers calculs - Révisions

1 Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

a) $z = 3 + 2i - 1 + 3i$ b) $z = (1 + 2i)(4 + 3i)$

c) $z = (1 + i)^2$ d) $z = (2 - 5i)^2$

e) $z = (1 + i)^3$ f) $z = (2 + i)^2(1 - 2i)$

g) $z = \dfrac{1}{1 - i}$ h) $z = \dfrac{4 - 6i}{3 + 2i}$

2 Dans chaque cas, représenter l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité suivante :

a) $|z| = 3$ b) $|z - 2 + i| = 1$

c) $\mathcal{R}e(z) = -2$ d) $\mathcal{I}m(z) = 3$

3 Trouver tous les nombres complexes z vérifiant les équations suivantes :

a) $(1 + i)z = 3 - i$ b) $\dfrac{z + 1}{z - 1} = 2i$

c) $(2z + 1 - i)(iz + 3) = 0$ d) $2\overline{z} = i - 1$

e) $\dfrac{\overline{z} - 1}{\overline{z} + 1} = i$ f) $2z + 1 - i = iz + 2$

4 Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$, on pose $z' = \dfrac{iz - 1}{z - i}$. Démontrer que :

$$z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |z| = 1$$

5 Résoudre, dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes :

a) $2z^2 - 6z + 5 = 0$ b) $z^2 = z + 1$

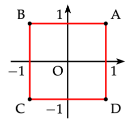
c) $\dfrac{z - 8}{z - 3} = z$ d) $z^2 = -3$

e) $z^4 + 3z^2 + 2 = 0$ f) $z^2 + 2\overline{z} + 1 = 0$

6 On considère l'équation : $z^3 + 3z^2 + z + 3 = 0$.
a) Montrer que -3 est solution de l'équation.
b) Résoudre l'équation dans $\mathbb{C}$.

7 Soit $a \in \mathbb{R}$.
a) Pour quelles valeurs de a la quantité $(a - i)^3$ est un réel ?
b) Même question avec un imaginaire pur.

8 Dans un repère orthonormé direct, on considère le carré $ABCD$.



Donner l'affixe, le module et un argument de chacun des sommets du carré.

9 Donner la forme trigonométrique et la forme exponentielle des nombres complexes suivants :

a) $z_1 = 2 + 2i\sqrt{3}$ b) $z_2 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$

c) $z_3 = 4 - 4i$ d) $z_4 = -2i$

e) $z_5 = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}i$ f) $z_6 = \dfrac{4}{1 - i}$

g) $z_7 = (1 - i)^6$ h) $z_8 = \dfrac{1 - \sqrt{3}i}{1 + i}$

i) $z_9 = \dfrac{(\sqrt{3} + i)^9}{(1 + i)^{12}}$ j) $z_{10} = -12e^{i\frac{\pi}{4}}$

10 Soient les points $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ tels que :

$$a = 1 + \frac{3}{4}i,\ b = 2 - \frac{5}{4}i \text{ et } c = 3 + \frac{7}{4}i$$

a) Placer les points A, B et C dans le plan complexe.
b) Quelle est la nature du triangle ABC ?
c) Calculer l'affixe de A' tel que $ABA'C$ soit un carré.

Généralités

11 ♡ Soit $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$. Montrer que $\dfrac{z + 1}{z - 1}$ est imaginaire pur.

12 ♡★ Déterminer tous les complexes z tels que :

$$|z| = |1 - z| = \left|\frac{1}{z}\right|$$

13 ★★ Montrer que :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2,\ ||z| - |z'|| \leq |z - z'|$$

14 ★★ Soient $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tels que $|a| = |b| = |c| = 1$. Montrer que :

$$|ab + bc + ac| = |a + b + c|$$

15 ★★ On considère l'application :

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\setminus\{2\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{z+1}{z-2} \end{array}$$

Déterminer l'ensemble des complexes z tels que :

a) $\exists \omega \in \mathbb{C},\ h(\omega) = z$ b) $|h(z)| = 1$ c) $\mathcal{R}e(h(z)) = 0$

16 ★★★ Résoudre dans $\mathbb{C}$:

$$\overline{z}(z-1) = z^2(\overline{z}-1)$$

Équations de degré 2

17 Résoudre l'équation :

$$z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0$$

18 ♡★ a) Déterminer les racines carrées de $5 - 12i$.
b) En remarquant que $-2i$ est solution, résoudre l'équation :

$$z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = 0$$

c) Que dire du triangle dont les sommets ont pour affixes les solutions de l'équation précédente ?

19 ★★ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$z^4 - 4(1+i)z^3 + 12iz^2 + 8(1-i)z - 5 = 0$$

Forme trigonométrique

20 Simplifier $\dfrac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$, pour $\theta \in]-\pi, \pi[$.

21 ★ Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

a) $z_1 = \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$

b) $z_2 = \dfrac{1-\cos(\theta) - i\sin(\theta)}{1+\cos(\theta)+i\sin(\theta)}$, $\theta \in \mathbb{R}$

c) $z_3 = -\sin(2\theta) + 2i\cos(\theta)^2$, $\theta \in \mathbb{R}$

22 ★ Trouver tous les nombres complexes z tels que :

$$z^3 = -16\bar{z}^7$$

23 ★ Soit $\theta \in \mathbb{R}$, linéariser l'expression :

$$A = \sin^6\theta + \cos^4\theta\sin^2\theta$$

24 ♡★★ Soit $\theta \in \mathbb{R}$, simplifier les sommes suivantes :

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) \text{ et } S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$$

25 ★★ Trouver tous les entiers $n \in \mathbb{N}$ pour lesquels le complexe Z_n suivant est un réel positif :

$$Z_n = \left(\frac{(1-i\sqrt{3})^5}{(1-i)^3}\right)^n$$

26 ★★★ Soient $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que $e^{i\alpha} + e^{i\beta} + e^{i\gamma} = 0$. Montrer que : $e^{2i\alpha} + e^{2i\beta} + e^{2i\gamma} = 0$.

Racines de l'unité

27 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^n + 1 = 0$$

28 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^3 = 4\sqrt{2}(1+i)$$

29 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le produit des racines n-ièmes de l'unité.

30 ★★ Trouver toutes les solutions complexes des équations suivantes :

a) $z^8 + 4z^4 + 16 = 0$

b) $z^5 = \overline{z}$

c) $(z^2 + z + 1)^2 + 1 = 0$

31 ♡★★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(z+1)^n = (z-1)^n$$

Combien y-a-t-il de solutions ?

32 ♡★★ Soit $\omega = e^{2i\pi/7}$. Trouver une écriture algébrique simple de :

$$A = \omega + \omega^2 + \omega^4 \text{ et } B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$$

Applications à la géométrie

33 ★ Soit $n \geq 3$.
a) Quelle est la longueur du côté du polygone régulier dont les sommets sont les images des racines n-ièmes de l'unité ?
b) En déduire l'aire de ce polygone régulier à n côtés.

34 ★ Soient A et B deux points distincts dans le plan complexe, $\mathcal{P}$. À l'aide des nombres complexes, démontrer le résultat classique suivant :

$$\forall M \in \mathcal{P},\ (MA) \perp (MB) \Leftrightarrow M \in \mathcal{C}$$

où $\mathcal{C}$ désigne le cercle de diamètre $[AB]$.

35 ★ Déterminer l'ensemble des points M d'affixe $z \in \mathbb{C}$ tels que :

$$z + \bar{z} = |z|$$

36 ♡★ Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que les points d'affixes $1, z$ et z^3 soient alignés.

37 ★ On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct.
a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, caractériser géométriquement les applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ suivantes :

i) $f(z) = z + 2 - i$ ii) $f(z) = iz$

iii) $f(z) = -3z + 2 - i$ iv) $f(z) = iz + 2$

v) $f(z) = (1-i)z + 3i$ vi) $f(z) = e^{i\alpha}z - e^{i\alpha} + 1$

b) Donner l'écriture complexe des transformations suivantes :
i) Homothétie de centre $A(1+2i)$ et de rapport -2.
ii) Rotation de centre $\Omega(-1+3i)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$.
iii) Similitude directe de centre $B(1-i)$, de rapport 3 et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.
iv) Symétrie centrale de centre $C(2-i)$.
c) Donner l'écriture complexe et la nature de la similitude directe s telle que :

$$s(A) = C \text{ et } s(B) = D$$

avec $A(1+i)$, $B(-2+i)$, $C(-2+i)$ et $D(-2-8i)$.

38 ★★ Soient A, B et C trois points du plan d'affixes respectives a, b et c. Montrer que ABC est un triangle équilatéral si et seulement si :

$$a^2 + b^2 + c^2 - (ab + ac + bc) = 0$$

Défis

D1 ★★★ Soient $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tels que :

$$|a| = |b| = |c| = 1 \text{ et } a + b + c = 1$$

Montrer que l'un de ces trois complexes vaut 1.

D2 ★★★★ Soient $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{C}^4$ deux à deux distincts. On considère les complexes suivants :

$$z_1 = \frac{\delta - \alpha}{\beta - \gamma},\ z_2 = \frac{\delta - \beta}{\gamma - \alpha} \text{ et } z_3 = \frac{\delta - \gamma}{\alpha - \beta}$$

Montrer que si deux des trois nombres z_1, z_2 et z_3 sont imaginaires purs alors il en est de même du troisième.

D3 ★★★★ Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que :

$$\mathcal{R}e(z) \geq 0 \text{ et } \left|z^2 - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2}$$

Montrer que : $\left|z - \dfrac{1}{3}\right| < \dfrac{2}{3}$.

D4 ★★★★ a) Trouver un nombre complexe de module 1 qui ne soit, pour aucun entier n, une racine n-ième de l'unité.
b) Montrer que $\dfrac{2+i}{2-i}$ n'est pas une racine n-ième de l'unité.

D5 ★★★★ Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(z_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{C}^n$ tous non nuls. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

D6 ★★★★ Montrer que :

$$A_0 = \sum_{\substack{p=0 \\ p \equiv 0\ [3]}}^{n} \binom{n}{p} = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)$$