1-Vrai ou faux : un sous-groupe d'un groupe abélien est abélien.

2-Soit G un groupe et H un sous-groupe de G. Est-il vrai que le complémentaire de H dans G est également un sous-groupe de G ?

3-$\mathbb{R}_+^*$ est-il un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$? de $(\mathbb{R}, \times)$?

4-Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})^* = \{a + b\sqrt{2},\ (a, b) \in \mathbb{Q}^2\} \setminus \{0\}$ muni de la loi $\times$ est un groupe.

1-Vrai ou faux : un sous-groupe d'un groupe abélien est abélien.

Réponse : Soit $(G, \star)$ un groupe et H un sous-groupe de G. Comme G est abélien, on a :

$$\forall (x, y) \in G^2,\ xy = yx$$

Cette égalité est en particulier vraie pour tous x et y appartenant à H puisque $H \subset G$. Le sous-groupe H est abélien.

2-Soit G un groupe et H un sous-groupe de G. Est-il vrai que le complémentaire de H dans G est également un sous-groupe de G ?

Réponse : C'est faux. Comme H est un sous-groupe de G alors $e \in H$, ainsi e n'appartient pas au complémentaire de H dans G.

3-$\mathbb{R}_+^*$ est-il un sous groupe de $(\mathbb{R}, +)$? de $(\mathbb{R}, \times)$?

Réponse : • $\mathbb{R}_+^*$ n'est pas un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ car la condition H1) n'est pas vérifiée puisque le neutre de l'addition, 0, n'appartient pas à $\mathbb{R}_+^*$.

• La seconde question n'a pas de sens car $(\mathbb{R}, \times)$ n'est pas un groupe puisque 0 n'est pas inversible. Par contre $\mathbb{R}_+^*$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$.

4-Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})^* = \{a + b\sqrt{2},\ (a,b) \in \mathbb{Q}^2\} \setminus \{0\}$ muni de la loi $\times$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$.

Réponse : Nous allons démontrer pour cela que c'est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$.

- Déjà $\mathbb{Q}(\sqrt{2})^* \subset \mathbb{R}^*$.
- SG1) $1 = 1 + 0\sqrt{2}$ appartient à $\mathbb{Q}(\sqrt{2})^*$.
- SG2) Soient $(x, y) \in (\mathbb{Q}(\sqrt{2})^*)^2$, il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{Q}^4$ tels que : $x = a + b\sqrt{2}$ et $y = c + d\sqrt{2}$. On a alors :

$$xy = (a + b\sqrt{2}) \times (c + d\sqrt{2}) = \underbrace{ac + 2bd}_{\in\mathbb{Q}} + \underbrace{(ad + bc)}_{\in\mathbb{Q}}\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})^*$$

• SG3) Soit $x \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})^*$ avec $x = a + b\sqrt{2}$ où $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$, nous devons démontrer que $\frac{1}{x} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})^*$. On a :

$$\frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2} = \underbrace{\frac{a}{a^2 - 2b^2}}_{\in\mathbb{Q}} - \underbrace{\frac{b}{a^2 - 2b^2}}_{\in\mathbb{Q}}\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})^*$$

Au cours de ce calcul, on a multiplié par $a - b\sqrt{2}$ qui est non nul car sinon :

• soit $b = 0$ et dans ce cas $a = 0$ ce qui est absurde puisque $x \neq 0$.

• soit $b \neq 0$ et dans ce cas : $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ ce qui est absurde car $\sqrt{2}$ est irrationnel.