1-Montrer que $f : x \mapsto x^2\cos(x) + x\sin(x) + 1$ s'annule sur $\mathbb{R}_+$.

2-Soient f et g deux fonctions ayant une limite en a, on suppose que $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leq \lim\limits_{x\to a} g(x)$. Peut-on en déduire que $f \leq g$ au voisinage de a ?

3-Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ telle que $f = \dfrac{1}{f}$. Démontrer que f est constante.

4-Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto x^{\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)+1}$. Démontrer que f est continue en 0.

1-Montrer que $f : x \mapsto x^2 \cos(x) + x \sin(x) + 1$ s'annule sur $\mathbb{R}_+$.

Réponse : La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$, on a :

$$f(0) = 1 \geq 0 \text{ et } f(\pi) = -\pi^2 + 1 \leq 0$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, qui s'applique car f est continue, il existe $c \in [0, \pi]$ tel que $f(c) = 0$.

2-Soient f et g deux fonctions ayant une limite en a, on suppose que $\lim\limits_{x \to a} f(x) \leq \lim\limits_{x \to a} g(x)$. Peut-on en déduire que $f \leq g$ au voisinage de a ?

Réponse : On prend g la fonction nulle et $f : x \mapsto x^2$ définies sur $\mathbb{R}$. On a $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$ donc $\lim\limits_{x \to a} f(x) \leq \lim\limits_{x \to a} g(x)$, pourtant on ne peut pas affirmer que $x^2 \leq 0$ pour x dans un voisinage de 0.

3-Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ telle que $f = \dfrac{1}{f}$. Démontrer que f est constante.

Réponse : D'après l'hypothèse, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)^2 = 1$, c'est-à-dire que $f(x) = 1$ ou $f(x) = -1$. Par l'absurde si f prend la valeur 1 et la valeur -1 alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires qui s'applique puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, on sait que f s'annule : ce qui est contradictoire.
On en déduit que f est constante sur $\mathbb{R}$ égale à 1 ou à -1.

4-Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto x^{\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)+1}$. Démontrer que f est continue en 0.

Réponse : On peut expliciter f :

$$f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \end{array}$$

Pour tout $x \in]-1,1[$, on a : $x^2 \leq |x|$, ainsi $|f(x)| \leq |x|$. Quand x tend vers 0, on a bien : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$, ce qui démontre que f est continue en 0.