# Relations binaires

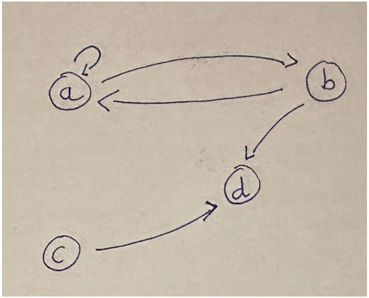
## I-Vocabulaire

### Définition

On appelle **relation binaire** sur un ensemble $E$ la donnée d'une partie $\mathcal{R}$ de $E^2$. Au lieu de noter $(x, y) \in \mathcal{R}$, on notera : $x\mathcal{R}y$ (ce qui se lit $x$ est en relation avec $y$).

**Exemple.** On considère $E = \{a, b, c, d\}$ et on choisit la relation binaire suivante :

$$\mathcal{R} = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,d),(c,d)\}$$




On écrira donc dans ce cas :

$$a\mathcal{R}a,\ \ a\mathcal{R}b,\ \ b\mathcal{R}a,\ \ b\mathcal{R}d,\ \ c\mathcal{R}d$$

**Exemples.**

i) Soit $E$ un ensemble, on définit la relation $\mathcal{R}_1$ par :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ x\mathcal{R}_1 y \Leftrightarrow x = y$$

ii) Avec $E = \mathbb{R}$, on définit la relation $\mathcal{R}_2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x\mathcal{R}_2 y \Leftrightarrow x \leq y$$

iii) Avec $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on définit la relation $\mathcal{R}_3$ par :

$$\forall (f,g) \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})^2,\ f\mathcal{R}_3 g \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq g(x)$$

iv) Avec $E = \mathbb{Z}$, on définit la relation $\mathcal{R}_4$ par :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2,\ a\mathcal{R}_4 b \Leftrightarrow a | b$$

## Définition

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble $E$.

i) On dit que $\mathcal{R}$ est **réflexive** si et seulement si :

$$\forall x \in E,\ x\mathcal{R}x$$

ii) On dit que $\mathcal{R}$ est **transitive** si et seulement si :

$$\forall (x,y,z) \in E^3,\ x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$$

iii) On dit que $\mathcal{R}$ est **symétrique** si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$$

iv) On dit que $\mathcal{R}$ est **antisymétrique** si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$$

**Exemples.** On reprend les mêmes exemples que précédemment.

i) La relation $\mathcal{R}_1$ d'égalité sur un ensemble $E$. Prenons $(x, y, z) \in E^3$. Cette relation est :

• **Réflexive**. On a bien $x\mathcal{R}_1x$ car $x = x$.

• **Transitive**. On suppose que $x\mathcal{R}_1y$ et $y\mathcal{R}_1z$, c'est-à-dire que $x = y$ et $y = z$. On en déduit que $x = z$ donc $x\mathcal{R}_1z$.

• **Symétrique**. On suppose que $x\mathcal{R}_1y$ alors $x = y$ donc $y = x$ et l'on a bien $y\mathcal{R}_1x$.

• **Antisymétrique**. On suppose que $x\mathcal{R}_1y$ et $y\mathcal{R}_1x$ alors $x = y$ et $y = x$ donc on a bien $x = y$.

ii) La relation $\mathcal{R}_2$ d'inégalité sur $\mathbb{R}$. Prenons $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Cette relation est :

• **Réflexive**. On a bien $x\mathcal{R}_2x$ car $x \leq x$.

• **Transitive**. On suppose que $x\mathcal{R}_2y$ et $y\mathcal{R}_2z$, c'est-à-dire que $x \leq y$ et $y \leq z$. On en déduit que $x \leq z$ donc $x\mathcal{R}_2z$.

• **Non symétrique**. Si $x\mathcal{R}_2y$ alors $x \leq y$ et cela n'implique pas nécessairement $y \leq x$.

• **Antisymétrique**. On suppose que $x\mathcal{R}_2y$ et $y\mathcal{R}_2x$ alors $x \leq y$ et $y \leq x$ donc on a bien $x = y$.

iii) La relation $\mathcal{R}_3$ d'inégalité sur les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est également réflexive, transitive et antisymétrique mais n'est pas symétrique.

iv) La relation $\mathcal{R}_4$ de divisibilité sur $\mathbb{Z}$. Prenons $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$. Cette relation est :

• **Réflexive**. On a bien $a\mathcal{R}_4 a$ car $a|a$.

• **Transitive**. On suppose que $a\mathcal{R}_4 b$ et $b\mathcal{R}_4 c$, c'est-à-dire que $a|b$ et $b|c$. On en déduit que $a|c$ donc $a\mathcal{R}_4 c$.

• **Non symétrique**. Si $a\mathcal{R}_4 b$ alors $a|b$ et cela n'implique pas nécessairement $b|a$.

• **Non antisymétrique**. On suppose que $a\mathcal{R}_4 b$ et $b\mathcal{R}_4 a$ alors $a|b$ et $b|a$ cela n'implique pas nécessairement $a = b$ mais $a = \pm b$. Ce qui permet de trouver un contre-exemple, on a : $3| - 3$ et $-3|3$ mais $3 \neq -3$.

La relation de divisibilité sur $\mathbb{N}$ est antisymétrique.

**Remarque.** Il existe des relations binaires qui ne sont pas réflexives comme l'inégalité stricte sur $\mathbb{R}$.

Il est également possible de trouver des relations binaires non transitives par exemple, sur $\mathbb{R}$ : $\neq$. En effet, on a par exemple : $2 \neq 3$ et $3 \neq 2$ pourtant $2 \neq 2$ est faux.

## Définition

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble $E$.

• On dit que deux éléments de $E$, $x$ et $y$, sont **comparables** si et seulement si $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$.

• On dit que la relation binaire $\mathcal{R}$ est **totale** si et seulement si deux éléments quelconques de $E$ sont comparables. C'est-à-dire :

$$\forall (x, y) \in E^2, \ x\mathcal{R}y \text{ ou } y\mathcal{R}x$$

• Une relation binaire qui n'est pas totale est dite **partielle**.

**Exemples.** On reprend les mêmes exemples que précédemment.

i) La relation d'égalité sur un ensemble $E$ n'est pas totale en général car si $(x, y) \in E^2$, on a pas toujours $x = y$ ou $y = x$ (sauf si $E$ est vide ou n'a qu'un élément).

ii) La relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est totale car deux réels $x$ et $y$ sont toujours comparables pour cette relation puisque l'on a forcément $x \leq y$ ou $y \leq x$.

iii) La relation d'inégalité sur les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas totale, il est possible de trouver deux fonctions non comparables. Par exemple cos et sin. En effet, on a n'a pas :

$$\cos \mathcal{R}_3 \sin \ : \ \forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x) \leq \sin(x)$$

$$\sin \mathcal{R}_3 \cos \ : \ \forall x \in \mathbb{R},\ \sin(x) \leq \cos(x)$$

iv) La relation de divisibilité sur $\mathbb{Z}$ n'est pas totale. Par exemple 3 et 7 ne sont pas comparables puisque $3|7$ et $7|3$ sont faux.

## II-Relations d'équivalences

### Définition

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble $E$. On dit que $\mathcal{R}$ est une **relation d'équivalence** sur $E$ si et seulement si elle est réflexive, transitive et symétrique.

On note parfois $\sim$ au lieu de $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence.

**Exemples.**

i) Parmi les exemples précédents seule la relation d'égalité sur un ensemble $E$ est une relation d'équivalence.

ii) Sur $E = \mathbb{R}^*$, on définit la relation binaire suivante :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2,\ x \sim y \Leftrightarrow x \text{ et } y \text{ ont le même signe}$$

C'est une relation d'équivalence.

iii) Soit $n \in \mathbb{N}$, on définit la relation de congruence modulo $n$ sur $\mathbb{Z}$ ainsi :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2,\ a \sim b \Leftrightarrow a = b\ [n]$$

Nous avons démontré dans le chapitre 12 que c'est une relation d'équivalence.

## Définition

Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur un ensemble $E$. Pour tout $x \in E$, on définit la **classe d'équivalence** de $x$ par :

$$Cl(x) = \{y \in E,\ x \sim y\}$$

La classe de $x$ est donc l'ensemble des éléments de $E$ qui sont en relation avec $x$.

**Exemple.** Prenons la relation de congruence modulo 4 et déterminons la classe de 3. On procède par équivalences, pour $b \in \mathbb{Z}$ :

$$\begin{aligned} b \in Cl(3) &\Leftrightarrow 3 \sim b \\ &\Leftrightarrow b = 3\ [4] \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ b = 3 + 4k \end{aligned}$$

Finalement :

$$Cl(3) = \{3 + 4k,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

On dit que 3 est un **représentant** de sa classe. Il y a d'autres représentants de cette classe 7, 11, $-1$, $-5$...et finalement tous les entiers congrus à 3 modulo 4.

Pour cette relation d'équivalence, nous avons 4 classes d'équivalence.

**Exemple.** On se place dans l'ensemble $E$ des MPSI2 et on considère la relation d'équivalence : "être né le même mois".

Donnons différentes classes :

$$Cl(Noa) = \{Noa, Nina, Dorian, Pierrick\ D., Ayelo, Alix, François\}$$

$$Cl(Daria) = \{Daria\}$$

$$Cl(Ayelo) = Cl(Noa)$$

**Théorème**

Soit $\sim$ une relation binaire sur un ensemble $E$, les classes d'équivalences forment une partition de $E$.
C'est-à-dire qu'elles sont :

- non vides
- leur union donne $E$
- elles sont disjointes ou égales.

**Preuve.**

• Soit $x \in E$, la classe de $x$ est non vide car on a $x \in Cl(x)$ puisque $x \sim x$ par réflexivité d'une relation d'équivalence.

• Montrons que $E = \bigcup_{x \in E} Cl(x)$ par double inclusion.

Soit $y \in E$, on a $y \in Cl(y)$ par réflexivité donc $y \in \bigcup_{x \in E} Cl(x)$.

L'autre l'inclusion est immédiate puisque par définition, pour tout $x \in E$, on a $Cl(x) \subset E$.

• Montrons enfin que les classes sont disjointes ou égales. Prenons $(x, y) \in E^2$, on suppose que $Cl(x) \cap Cl(y) \neq \emptyset$. Montrons que $Cl(x) = Cl(y)$.

Il existe $t \in Cl(x) \cap Cl(y)$. On a $t \in Cl(x)$ donc $x \sim t$ et $t \in Cl(y)$ donc $y \sim t$. Par symétrie, on a aussi $t \sim y$. Par transitivité, $x \sim t$ et $t \sim y$ impliquent $\underline{x \sim y}$.

Montrons à présent que $Cl(x) = Cl(y)$ par double inclusion. Soit $z \in Cl(x)$, on a $x \sim z$ ou encore par symétrie $z \sim x$. Or $x \sim y$ donc par transitivité $z \sim y$, c'est-à-dire $z \in Cl(y)$. D'où l'inclusion $Cl(x) \subset Cl(y)$. L'autre inclusion se démontre de la même façon.

Les classes d'équivalence forment une partition de $E$.

III-Relations d'ordre

**Définition**

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble $E$. On dit que $\mathcal{R}$ est une **relation d'ordre** sur $E$ si et seulement si elle est réflexive, transitive et antisymétrique.

On note parfois $\leq$ au lieu de $\mathcal{R}$ une relation d'ordre.

Un ensemble $E$ muni d'une relation d'ordre $\leq$ est appelé un ensemble ordonné. On le note $(E, \leq)$.

**Exemples.** On a les exemples classiques suivants :

i) L'inégalité usuelle sur $\mathbb{R}$.

ii) L'inégalité sur les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

iii) La relation de divisibilité sur $\mathbb{N}$.

iv) Soit $E$ un ensemble l'inclusion est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$. En effet, pour $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$ :

- **Réflexivité.** $A \subset A$.
- **Transitivité.** si $A \subset B$ et $B \subset C$ alors $A \subset C$.
- **Antisymétrie.** si $A \subset B$ et $B \subset A$ alors $A = B$.

## Définition

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné et $A$ une partie de $E$.

- On dit que $A$ est majorée s'il existe $M \in E$ tel que :

$$\forall a \in A,\ a \leq M$$

- On dit que $A$ est minorée s'il existe $m \in E$ tel que :

$$\forall a \in A,\ m \leq a$$

- $A$ est bornée si et seulement si elle est majorée et minorée.

**Exemples.**

i) Dans $\mathbb{R}$ avec l'inégalité usuelle, on a tous les exemples vus dans le chapitre 9.

ii) Dans $\mathbb{N}$ muni de la relation de divisibilité, prenons $A = \{8, 10, 12\}$. La partie $A$ est minorée par 2 puisque pour tout $a \in A$, $2|a$. Elle est majorée par 120 car pour tout $a \in A,\ a|120$. Elle est aussi majorée par 0 car pour tout $a \in A,\ a|0$.

iii) Dans $(\mathcal{P}(E), \subset)$, toute partie $\mathcal{F}$ de $\mathcal{P}(E)$ est minorée par $\emptyset$ et majorée par $E$ car :

$$\forall A \in \mathcal{F},\ \emptyset \subset A \text{ et } A \subset E$$

**Définition**

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné et $A$ une partie de $E$.

• On dit que $M \in E$ est un maximum de $A$ ou plus grand élément de $A$ si et seulement si :

$$M \text{ est un majorant de } A \text{ et } M \in A$$

• On dit que $m \in E$ est un minimum de $A$ ou plus petit élément de $A$ si et seulement si :

$$m \text{ est un minorant de } A \text{ et } m \in A$$

**Proposition**

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné et $A$ une partie de $E$. Si $A$ possède un maximum, celui-ci est unique.

Si $A$ possède un minimum, celui-ci est unique.

**Preuve.**

Soient $M$ et $M'$ deux maximums de la partie $A$. On a :

- $M$ maximum de $A$ et $M' \in A$ donc $M' \leq M$.
- $M'$ maximum de $A$ et $M \in A$ donc $M \leq M'$.

Par antisymétrie, on a $M' \leq M$ et $M \leq M'$ qui implique $M = M'$.

D'où l'unicité du maximum.

**Exemple.**

On se place dans $\mathbb{N}$ muni de la relation de divisibilité.

• Prenons $A = \{3, 7\}$. Cette partie ne possède ni maximum ni minimum.

• Prenons $A = \{2, 3, 6\}$. La partie $A$ ne possède pas de minimum, par contre 6 est le maximum de $A$ car $2|6$, $3|6$ et $6|6$.

• Prenons $A = \mathbb{N}$. La partie $A$ possède 1 pour minimum car pour tout $a \in \mathbb{N},\ 1|a$. Elle possède 0 comme maximum car pour tout $a \in \mathbb{N},\ a|0$.

**Définition**

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné et $A$ une partie de $E$.

• Sous réserve d'existence, la borne supérieure de $A$ est le plus petit majorant de $E$.

• Sous réserve d'existence, la borne inférieure de $A$ est le plus grand minorant de $E$.

**Exemple.**

On se place dans $\mathbb{N}$ muni de la relation de divisibilité.

Prenons $A = \{6, 8\}$. Cette partie possède de nombreux majorants 24, 48, 720...le plus petit majorant au sens de la relation de divisibilité est 24. Cette borne supérieure est bien le ppcm de 6 et 8.

De même 2 est la borne inférieure de $A$ et cela correspond au pgcd.

**Exercices :** 3-4-5-7 (indications sur le site)