# Exercice 1

1. Posons $u : x \mapsto x^2 - 2x + 3$ et remarquons tout de suite que la fonction $u$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale. Le discriminant de ce trinôme vaut $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 = -8$, ainsi la fonction $u$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$. La fonction ln étant définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que $f$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
$$\boxed{f \text{ est définie et dérivable sur } \mathbb{R}}$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$f'(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x+3} = \frac{2(x-1)}{x^2-2x+3}$$
Ainsi, pour tout $x > 1$, on a : $f'(x) > 0$ et $f'(1) = 0$ donc $f$ est <u>strictement croissante</u> sur $[1, +\infty[$. D'autre part, $f$ est <u>continue</u> sur $[1, +\infty[$ car dérivable sur cet intervalle. Enfin, $\underline{\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \ln(2) \text{ et } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.
Ce dernier résultat s'obtient par composition de limites puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-2x+3) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et ln tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
Toutes les conditions sont réunies pour appliquer le théorème de la bijection et en déduire que :
$$\boxed{f \text{ réalise une bijection de } [1, +\infty[ \text{ vers } [\ln(2), +\infty[}$$

3. Soit $x \in [1, +\infty[$ et $y \in [\ln(2), +\infty[$. On a :
$$\begin{array}{rcl} y = f(x) & \Leftrightarrow & y = \ln(x^2 - 2x + 3) \\ & \Leftrightarrow & e^y = x^2 - 2x + 3 \\ & \Leftrightarrow & x^2 - 2x + 3 - e^y = 0 \end{array}$$
On reconnaît un trinôme du second degré, son discriminant vaut $\Delta = 4 - 4(3 - e^y) = 4(e^y - 2)$. Or, par hypothèse, $y \geq \ln(2)$ donc $\Delta \geq 0$. L'équation admet deux solutions réelles, éventuellement confondues :
$$x_1 = \frac{2 + 2\sqrt{e^y-2}}{2} = 1 + \sqrt{e^y - 2} \text{ et } x_2 = \frac{2 - 2\sqrt{e^y-2}}{2} = 1 - \sqrt{e^y - 2}$$
Si $y = \ln(2)$, les deux solutions sont confondues mais dès que $y > \ln(2)$, on a : $x_2 < 1$ : cette solution est à exclure car $x \in [1, +\infty[$. Ainsi l'unique antécédent de $y$ dans $[1, +\infty[$, qui existe d'après la question 2., est :
$$x_1 = 1 + \sqrt{e^y - 2}$$
$$\boxed{\begin{array}{cccc} f^{-1} & : & [\ln(2), +\infty[ & \to & [1, +\infty[ \\ & & y & \mapsto & 1 + \sqrt{e^y - 2} \end{array}}$$

4. • Appliquons le théorème donnant la dérivée d'une bijection réciproque. La fonction $f$ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et pour tout $x \in ]1, +\infty[$, on a : $f'(x) \neq 0$, ainsi $f^{-1}$ est dérivable sur $]\ln(2), +\infty[$ et :
$$\begin{array}{rcl} \forall y \in ]\ln(2), +\infty[,\ (f^{-1})'(y) & = & \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))} \\ & = & \dfrac{(1+\sqrt{e^y-2})^2 - 2(1+\sqrt{e^y-2}) + 3}{2(1+\sqrt{e^y-2}-1)} \\ & = & \dfrac{1 + 2\sqrt{e^y-2} + e^y - 2 - 2 - 2\sqrt{e^y-2} + 3}{2\sqrt{e^y-2}} \\ & = & \dfrac{e^y}{2\sqrt{e^y-2}} \end{array}$$

Par contre $f'(1) = 0$ donc $f^{-1}$ ne sera pas dérivable en $f(1) = \ln(2)$.
• D'autre part, on peut utiliser l'expression de $f^{-1}$ trouvée à la question 3., la fonction racine carrée étant dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit, par composition, que $f^{-1}$ est dérivable sur $]\ln(2), +\infty[$ et :

$$\forall y \in ]\ln(2), +\infty[, \ (f^{-1})'(y) = \frac{e^y}{2\sqrt{e^y - 2}}$$

en appliquant la formule $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$. On retrouve bien le même résultat qu'avec l'autre méthode.

$$\boxed{\forall y \in ]\ln(2), +\infty[, \ (f^{-1})'(y) = \frac{e^y}{2\sqrt{e^y - 2}}}$$

# Exercice 2

1. C'est du cours, je vous renvoie au chapitre 4.
2. Voir également l'étude faite dans le chapitre 4.
3. Nous l'avons également démontré dans le chapitre 4.
4. La bijection réciproque d'une fonction impaire est impaire. Démontrons-le en toute généralité. Soit $f : I \to J$ une bijection impaire. Démontrer que $f^{-1}$ est impaire.

   • Soit $y \in J$, il existe $x \in I$ tel que $y = f(x)$. On a :

   $$-y = -f(x) = f(-x)$$

   Ce qui démontre que $-y \in J$ et on sait que $J$ est symétrique par rapport à 0.

   • Avec les mêmes notations, on a :

   $$f^{-1}(-y) = f^{-1}(-f(x)) = f^{-1}(f(-x)) = -x = -f^{-1}(y)$$

   La fonction $f^{-1}$ est impaire.
   On en déduit que :

   $$\boxed{\text{Argsh est une fonction impaire}}$$

5. D'après l'étude menée dans la question 2, nous avons vu que la dérivée de la fonction sh est la fonction ch qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, ainsi Argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et d'après la formule de dérivation d'une fonction réciproque, on a :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \ \text{Argsh}'(x) = \frac{1}{\text{ch}(\text{Argsh}(x))}$$

   On peut expliciter cela en calculant $\text{ch}(\text{Argsh}(x))$. D'après la question 1, pour tout $x$ réel, on a :

   $$\text{ch}(\text{Argsh}(x))^2 - \text{sh}(\text{Argsh}(x))^2 = 1 \Leftrightarrow \text{ch}(\text{Argsh}(x))^2 - x^2 = 1 \Leftrightarrow \text{ch}(\text{Argsh}(x))^2 = 1 + x^2$$

   La fonction ch étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, ceci implique que :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \ \text{ch}(\text{Argsh}(x)) = \sqrt{1 + x^2}$$

   et par suite :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{Argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$$

*Remarque : Cette expression de la dérivée permet de voir que la fonction Argsh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, ce que l'on pouvait prévoir car la bijection réciproque d'une fonction strictement croissante est également strictement croissante.*

6. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} y = \mathrm{sh}(x) &\Leftrightarrow y = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \\ &\Leftrightarrow 2e^x y = e^{2x} - 1 \qquad \text{on a multiplié par } e^x \text{ qui est non nul} \\ &\Leftrightarrow X^2 - 2yX - 1 = 0 \quad \text{on a posé } X = e^x \end{aligned}$$

Le discriminant de cette équation du second degré en $X$ vaut $4y^2 + 4$, il y a deux racines :

$$X_1 = \frac{2y + 2\sqrt{y^2+1}}{2} = y + \sqrt{y^2+1} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{2y - 2\sqrt{y^2+1}}{2} = y - \sqrt{y^2+1}$$

La racine $X_2$ est négative puisque $y \leq |y| = \sqrt{y^2} < \sqrt{y^2+1}$, or la variable $X$ est positive puisque $X = e^x$, ainsi on ne conserve que la racine $X_1$. On revient à la variable $x$ : $x = \ln(X_1) = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$.
On a démontré que pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ :

$$y = \mathrm{sh}(x) \Leftrightarrow x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$$

Ce qui montre que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{Argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})}$$

*Remarque : Voici les courbes représentatives des fonctions sh et argsh.*