2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose :

$$P \ : \ \exists M \in \mathbb{R}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) \leq M$$

$$Q \ : \ \forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$$

$$R \ : \ \forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) \geq 1 \text{ ou } f(x) \leq -1$$

Pour chacune des propositions P, Q, R, non(P), non(Q), non(R), donner graphiquement, à main levée, un exemple de fonction la vérifiant.

3. Parmi les 4 propositions suivantes, lesquelles sont vraies :

(1) : $\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall y \in \mathbb{R}, \ x + y > 0$

(2) : $\forall x \in \mathbb{R}, \ \exists y \in \mathbb{R}, \ x + y > 0$

(3) : $\exists x \in \mathbb{R}, \ \forall y \in \mathbb{R}, \ x + y > 0$

(4) : $\exists x \in \mathbb{R}, \ \exists y \in \mathbb{R}, \ x + y > 0$

4. Démontrer la proposition suivante :

$$\forall k \in \{1, 2\}, \ \exists (a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2, \ |a^3 - b^2| = k$$

1. Quelle est la négation de :

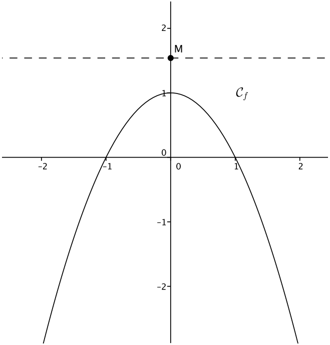
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \exists z \in \mathbb{R},\ (x+y=z) \Rightarrow (z=1)$$

Réponse : La négation de $P \Rightarrow Q$ est P et non(Q), ainsi la négation de la proposition de départ est :

$$\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall z \in \mathbb{R},\ (x+y=z) \text{ et } (z \neq 1)$$

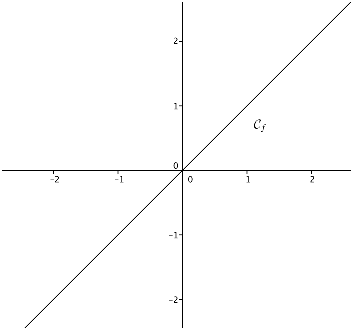
$$P \;:\; \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq M$$

Réponse :



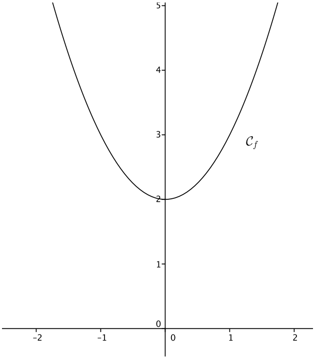
$$Q \ : \ \forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$$

Réponse :



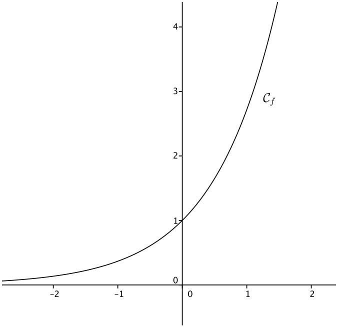
$$R \ : \ \forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) \geq 1 \text{ ou } f(x) \leq -1$$

Réponse :



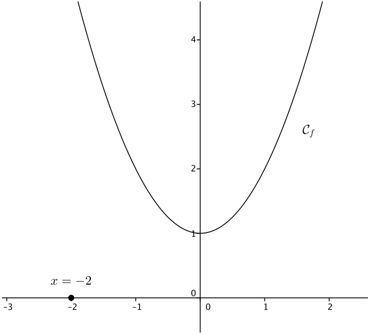
$$\text{non}(P) \;:\; \forall M \in \mathbb{R},\; \exists x \in \mathbb{R},\; f(x) > M$$

Réponse :



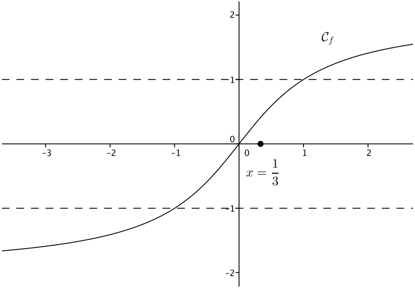
$$\text{non}(Q) \ : \ \exists x \in \mathbb{R}, \ f(x) \geq 0 \text{ et } x < 0$$

Réponse :



$$\text{non}(R) \;:\; \exists x \in \mathbb{R},\; f(x) < 1 \text{ et } f(x) > -1$$

Réponse :



3. Parmi les 4 propositions suivantes, lesquelles sont vraies :

(1) : $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$

(2) : $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$

(3) : $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$

(4) : $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$

Réponse :

(1) : faux avec par exemple $x = -1$ et $y = -1$.
(2) : vrai, il suffit de prendre y=-x+1 ainsi $x + y = 1 > 0$.
(3) : faux, il n'existe pas de nombre supérieur à tous les réels.
(4) : vrai, il suffit de prendre $x = 1$ et $y = 1$.

4. Démontrer la proposition suivante :

$$\forall k \in \{1, 2\},\ \exists (a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ |a^3 - b^2| = k$$

Réponse : Si $k = 1$, on peut prendre comme exemple $a = 2$ et $b = 3$ car $3^2 - 2^3 = 1$.
Si $k = 2$, on peut prendre comme exemple : $a = 3$ et $b = 5$ car $3^3 - 5^2 = 2$.