Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Le but de ce devoir est étudier la suite (S_n) définie pour $n \geq 1$ par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = \frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + ... + \frac{1}{n^\alpha}$$

Ces suites sont appelées des séries de Riemann. [1]

Dans la partie A, nous étudions le cas où $\alpha = 1$. Dans la partie B, nous étudions le cas où $\alpha = 2$ et nous déterminons dans ce cas la limite de la suite (S_n). Enfin, la partie C termine l'étude avec les autres valeurs de α.

La notation k^α avec $k \in \mathbb{N}^*$ n'a pas été définie pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ en terminale.
Par exemple, quel sens donner à $2^{\sqrt{2}}$? Nous verrons que, par définition, $k^\alpha = e^{\alpha \ln(k)}$ et vous pouvez vous servir de cette formule dans ce devoir.

Partie A - Cas où $\alpha = 1$

Le but de cette partie est donc d'étudier la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Cette suite s'appelle la série harmonique, c'est pour cela qu'on la note H_n ici au lieu de S_n.

1. **Divergence de la série harmonique.**
   (a) Soit k un entier naturel non nul, pour tout $x \in [k, k+1]$ donner un encadrement de $\dfrac{1}{x}$.
   (b) En intégrant, en déduire que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \dfrac{1}{k}$.
   (c) En sommant les inégalités obtenues à la question précédente pour k allant de 1 à n, démontrer que :
   $$H_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq H_n$$
   En déduire que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$$
   (d) Justifier que $\lim\limits_{n \to +\infty} H_n = +\infty$.
   C'est Oresme [2] qui a proposé la première preuve de la divergence de la série harmonique en 1360.
   Cette preuve manque de rigueur mais l'idée est simple à comprendre, vous la trouverez par exemple dans l'article Wikipédia sur la série harmonique.
   (e) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{H_n}{\ln(n)} = 1$.
   Cette dernière égalité permet de dire qu'en un certain sens la suite (H_n) tend vers $+\infty$ "comme" la suite $(\ln(n))$. On dit alors que ces deux suites sont équivalentes, ce que l'on note $H_n \sim \ln(n)$.

1. Bernhard Riemann (1826-1866) est un mathématicien allemand. Il a apporté de nombreuses contributions à l'analyse et la géométrie différentielle et a défini certains outils mathématiques qui ont servi plus tard au développement de la théorie de la relativité.
2. Nicolas Oresme (1320-1382) a apporté des contributions à différents domaines : philosophie, astronomie, mathématique, économie, musique et physique. Il a été évêque de Lisieux et conseiller du roi Charles V.

2. **Encadrement de H_n.** On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = H_n - \ln(n)$$

$$v_n = H_n - \frac{1}{n} - \ln(n)$$

   (a) i. Montrer que (u_n) est décroissante. On pensera à réutiliser l'inégalité de la question 1.(b)

   ii. Montrer que (v_n) est croissante.

   iii. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$.

   iv. En déduire que (u_n) et (v_n) convergent toutes les deux vers une limite commune que l'on ne cherchera pas à expliciter.

   On note γ la limite commune de ces deux suites, γ s'appelle la constante d'Euler-Mascheroni[3]

   (b) Justifier que $\gamma \in [0, 1]$.

   (c) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a $0 \leq u_n - \gamma \leq \frac{1}{n}$.

   (d) En déduire que pour tout entier naturel non nul n, on a : $\ln(n) + \gamma \leq H_n \leq \ln(n) + \gamma + \frac{1}{n}$.

   Une valeur approchée de γ à 10^{-3} près est $\gamma \approx 0,577$. On ignore actuellement si γ est un rationnel.

Partie B - Cas où $\alpha = 2$

Soit n un entier naturel non nul. Dans cette partie, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

Le but de l'exercice est d'étudier la convergence de la suite (S_n) et de trouver sa limite.

1. **Convergence.** Soit $k \geq 2$ un entier.

   (a) Démontrer que $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

   (b) En déduire, en sommant les inégalités précédentes, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n \leq 2$.

   (c) Démontrer que la suite (S_n) est strictement croissante.

   (d) Justifier que la suite (S_n) converge.

   Les questions suivantes visent à montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi^2}{6}$.

2. **Calcul de la limite.** Soit $k \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^k dt \quad \text{et} \quad J_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos(t)^k dt.$$

   (a) Calculer I_0, J_0, I_1.

   (b) En effectuant deux intégrations par parties successives, calculer J_1.

   On ne cherchera pas à calculer explicitement I_k et J_k pour répondre aux questions suivantes.

3. Leonhard Euler (1707-1783) est un mathématicien et physicien suisse. C'est sans aucun doute l'un des plus grands et plus prolifiques mathématiciens de tous les temps. Lorenzo Mascheroni (1750-1800) est un mathématicien italien.

(c) Démontrer que pour tout entier naturel k, $I_k > 0$.

(d) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $I_{k+2} = \dfrac{k+1}{k+2} I_k$.

(e) i. Soit $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, à l'aide d'une étude de fonction montrer que : $0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}\sin(t)$.

ii. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leq J_k \leq \dfrac{\pi^2}{4}(I_k - I_{k+2})$.

iii. Montrer alors que la suite $\left(\dfrac{J_k}{I_k}\right)$ converge vers 0.

(f) i. À l'aide de deux intégrations par parties successives, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$I_{k+2} = \frac{(k+1)(k+2)J_k - (k+2)^2 J_{k+2}}{2}.$$

ii. En déduire que $\dfrac{J_k}{I_k} - \dfrac{J_{k+2}}{I_{k+2}} = \dfrac{2}{(k+2)^2}$.

iii. En sommant les égalités précédentes, démontrer que (S_n) converge vers $\dfrac{\pi^2}{6}$.

On s'autorisera à noter : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ *maintenant que l'on sait que la limite existe.*
C'est Euler qui en 1735 a trouvé cette valeur, son approche est différente de celle présentée dans ce devoir.
On a également, par exemple, les valeurs suivantes :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

Plus généralement quand l'exposant à la puissance de l'indice est pair, de la forme $2r$ *où* $r \in \mathbb{N}^*$*, la valeur de la somme est de la forme* $\pi^{2r}q$ *où* q *est un nombre rationnel.*
Quand l'exposant est impair, on ne sait pas exprimer le résultat à l'aide de constantes connues telles que π *ou* e*. Par exemple :*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} = 1.2020569...$$

Partie C - Cas général

On reprend les notations du préambule, en posant pour $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.

On pourra bien entendu utiliser les résultats des parties B et C.

1. **Cas où** $\alpha \leq 1$**.** Démontrer que (S_n) diverge vers $+\infty$.
2. **Cas où** $\alpha \geq 2$**.** Démontrer que (S_n) converge, on ne cherchera pas à préciser la limite.
3. **Cas où** $\alpha \in]1, 2[$.

   (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, démontrer que pour tout $t \in [k, k+1]$:

   $$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \frac{1}{k^\alpha}$$

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

   $$S_n \leq \frac{1}{\alpha - 1}\left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) + 1$$

   (c) En déduire que la suite (S_n) est majorée, puis démontrer qu'elle converge.

4. Conclure, en résumant tous les résultats démontrés dans ce devoir.

Pour terminer et pour en savoir plus, vous pouvez écrire dans Google : "deux minutes pour l'hypothèse de Riemann" et visionner la vidéo correspondante.