1-Trouver $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que : $270u + 105v = 30$.

2-Trouver $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que : $45u + 24v = 2$.

3-Soient $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$, démontrer que :

$$(\text{pgcd}(a, b) = 1 \text{ et } \text{pgcd}(a, c) = 1) \Rightarrow \text{pgcd}(a, bc) = 1$$

4-Montrer que tout rationnel s'écrit de façon unique sous la forme $\frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ avec p et q premiers entre eux.

5-Soient $(x, a, m, n) \in \mathbb{N}^4$ avec $\text{pgcd}(m, n) = 1$. Démontrer que :

$$x \equiv a\ [mn] \Leftrightarrow (x \equiv a\ [m] \text{ et } x \equiv a\ [n])$$

6-Trouver tous les couples $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ tels que $x + y = 100$ et $\text{pgcd}(x, y) = 10$.

7-Soit $n \in \mathbb{N}$, démontrer que $n + 1 \Big| \binom{2n}{n}$.

1-Trouver $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que : $270u + 105v = 30$.

Réponse : On applique l'algorithme d'Euclide :
$270 = 105 \times 2 + 60$
$105 = 60 \times 1 + 45$
$60 = 45 \times 1 + 15$
$45 = 15 \times 3 + 0$
On en déduit que : $\text{pgcd}(270, 105) = 15$. On remonte les calculs :
$15 = 60 - 45$
$15 = 60 - (105 - 60) = 2 \times 60 - 105$
$15 = 2 \times (270 - 2 \times 105) - 105 = 2 \times 270 - 5 \times 105$
Il reste à multiplier par 2 pour obtenir : $4 \times 270 - 10 \times 105 = 30$.

2-Trouver $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que : $45u + 24v = 2$.

Réponse : C'est impossible. Par l'absurde si $45u + 24v = 2$ avec $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ alors $3|45$ et $3|24$ donc $3|45u + 24v$, c'est-à-dire $3|2$: ce qui est contradictoire.

3-Soient $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$, démontrer que :

$$(\text{pgcd}(a, b) = 1 \text{ et } \text{pgcd}(a, c) = 1) \Rightarrow \text{pgcd}(a, bc) = 1$$

Réponse : D'après le théorème de Bézout, il existe $(u, v, u', v') \in \mathbb{Z}^4$ tels que $au + bv = 1$ et $au' + cv' = 1$. En multipliant ces deux relations, il vient :

$$a(auu' + ucv' + bvu') + bc(vv') = 1$$

On en déduit que $\text{pgcd}(a, bc) = 1$, d'après la réciproque du théorème de Bézout dans le cas où les entiers sont premiers entre eux.

4-Montrer que tout rationnel s'écrit de façon unique sous la forme $\dfrac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ avec p et q premiers entre eux.

Réponse : **Existence**. Considérons un nombre rationnel que l'on écrit $\dfrac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. On note $d = \text{pgcd}(p, q)$, on sait alors qu'il existe $(p', q') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, premiers entre eux, tels que $p = dp'$ et $q = dq'$. On obtient :

$$\frac{p}{q} = \frac{dp'}{dq'} = \frac{p'}{q'}$$

Unicité. On suppose que l'on a deux écritures irréductibles égales : $\dfrac{p_1}{q_1} = \dfrac{p_2}{q_2}$ avec $(p_1, p_2) \in \mathbb{Z}^2$ et $(q_1, q_2) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $\text{pgcd}(p_1, q_1) = \text{pgcd}(p_2, q_2) = 1$.

On obtient $p_1 q_2 = p_2 q_1$, ainsi $q_2 | p_2 q_1$. Or q_2 est premier avec p_2 donc d'après le théorème de Gauss $q_2 | q_1$. De même, on démontre que $q_1 | q_2$. On en déduit que $q_1 = q_2$ car ce sont des entiers naturels et par suite $p_1 = p_2$.

Tout nombre rationnel possède une unique écriture irréductible.

5-Soient $(x, a, m, n) \in \mathbb{N}^4$ avec $\mathrm{pgcd}(m, n) = 1$. Démontrer que :

$$x \equiv a\ [mn] \Leftrightarrow (x \equiv a\ [m] \text{ et } x \equiv a\ [n])$$

Réponse : On a :

$$\begin{aligned} x \equiv a\ [mn] &\Leftrightarrow mn | x - a \\ &\underset{(\bigstar)}{\Leftrightarrow} m | x - a \text{ et } n | x - a \\ &\Leftrightarrow x \equiv a\ [m] \text{ et } x \equiv a\ [n] \end{aligned}$$

L'équivalence $(\bigstar)$ est à justifier : le sens $(\Leftarrow)$ est vrai en utilisant le corollaire du théorème de Gauss car m et n sont premiers entre eux, le sens $(\Rightarrow)$ est toujours vrai.

6-Trouver tous les couples $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ tels que $x + y = 100$ et $\text{pgcd}(x, y) = 10$.

Réponse : Il existe $(x', y') \in \mathbb{N}^2$ tels que $x = 10x'$ et $y = 10y'$ avec x' et y' premiers entre eux. La relation $x + y = 100$ devient $x' + y' = 10$. On peut faire la liste des entiers naturels x' et y' premiers entre eux qui vérifient cette relation :

$$(x', y') \in \{(1, 9), (3, 7), (7, 3), (9, 1)\}$$

On en déduit que :

$$\mathcal{S} = \{(10, 90), (30, 70), (70, 30), (90, 10)\}$$

7-Soit $n \in \mathbb{N}$, démontrer que $n+1 \Big| \binom{2n}{n}$.

Réponse : On a :

$$(n+1)\binom{2n+1}{n+1} = (n+1)\frac{(2n+1)!}{(n+1)!n!} = (2n+1)\frac{(2n)!}{(n!)^2} = (2n+1)\binom{2n}{n}$$

On en déduit que $(n+1)|(2n+1)\binom{2n}{n}$. Or $n+1$ et $2n+1$ sont premiers entre eux car $2 \times (n+1) - 1 \times (2n+1) = 1$, d'après le théorème de Gauss, on peut affirmer que $n+1$ divise $\binom{2n}{n}$.