Problème

A-Préliminaires géométriques

Le but de cette partie est double, d'une part donner une condition simple portant sur les affixes de deux vecteurs pour traduire la colinéarité ou l'orthogonalité de ces vecteurs. D'autre part, on démontre le résultat bien connu affirmant que les médiatrices d'un triangle sont concourantes et on donne l'affixe de ce point de concours.

1. (a) Soit $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $y = \mathcal{I}m(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$. Ainsi nous avons les équivalences suivantes :

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow \frac{z - \overline{z}}{2i} = 0 \Leftrightarrow z = \overline{z}.$$

(b) De même, on a $x = \mathcal{R}e(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$, d'où :

$$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow \frac{z + \overline{z}}{2} = 0 \Leftrightarrow z = -\overline{z}.$$

En résumé :

$$\boxed{\begin{array}{c} z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z} \\ z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\overline{z} \end{array}}$$

2. (a) Par définition $\overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{v_2} = x_1x_2 + y_1y_2$, ce qui devient d'après les formules données à la question précédente :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{v_2} &= \left(\frac{z_1 + \overline{z_1}}{2}\right)\left(\frac{z_2 + \overline{z_2}}{2}\right) + \left(\frac{z_1 - \overline{z_1}}{2i}\right)\left(\frac{z_2 - \overline{z_2}}{2i}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(z_1z_2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 + \overline{z_1}\,\overline{z_2} - z_1z_2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 - \overline{z_1}\,\overline{z_2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2\right)
\end{aligned}$$

Pour le déterminant, nous avons :

$$\begin{aligned}
\det(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) &= x_1y_2 - x_2y_1 \\
&= \left(\frac{z_1 + \overline{z_1}}{2}\right)\left(\frac{z_2 - \overline{z_2}}{2i}\right) - \left(\frac{z_2 + \overline{z_2}}{2}\right)\left(\frac{z_1 - \overline{z_1}}{2i}\right) \\
&= \frac{1}{4i}\left(z_1z_2 - z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 - \overline{z_1}\,\overline{z_2} - z_1z_2 + z_2\overline{z_1} - \overline{z_2}z_1 + \overline{z_1}\,\overline{z_2}\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(\overline{z_1}z_2 - z_1\overline{z_2}\right)
\end{aligned}$$

Récapitulons :

$$\boxed{\begin{array}{c} \overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{v_2} = \dfrac{1}{2}\left(z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2\right) \\[2ex] \det(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) = \dfrac{1}{2i}\left(\overline{z_1}z_2 - z_1\overline{z_2}\right) \end{array}}$$

(b) D'après ce qui a été rappelé en introduction, on a :

$$
\begin{array}{lcll}
\overrightarrow{v_1} \text{ et } \overrightarrow{v_2} \text{ sont orthogonaux} & \Leftrightarrow & \overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{v_2} = 0 & \\
\text{''} & \Leftrightarrow & \dfrac{1}{2}(z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2) = 0 & \text{d'après 2.(a)} \\
\text{''} & \Leftrightarrow & z_1\overline{z_2} = -\overline{z_1}z_2 & \text{puis on divise par } z_1\overline{z_1} \text{ qui est non nul par hypothèse} \\
\text{''} & \Leftrightarrow & \dfrac{\overline{z_2}}{\overline{z_1}} = -\dfrac{z_2}{z_1} & \\
\text{''} & \Leftrightarrow & \overline{\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)} = -\dfrac{z_2}{z_1} & \\
\text{''} & \Leftrightarrow & \dfrac{z_2}{z_1} \in i\mathbb{R} & \text{d'après la question 1.(b)}
\end{array}
$$

On effectue le même type de calcul pour la seconde assertion :

$$
\begin{array}{lcll}
\overrightarrow{v_1} \text{ et } \overrightarrow{v_2} \text{ sont colinéaires} & \Leftrightarrow & \det(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) = 0 & \\
\text{''} & \Leftrightarrow & \dfrac{1}{2i}(\overline{z_1}z_2 - z_1\overline{z_2}) = 0 & \text{d'après 2.(a)} \\
\text{''} & \Leftrightarrow & \overline{z_1}z_2 = z_1\overline{z_2} & \text{puis on divise par } z_1\overline{z_1} \text{ qui est non nul par hypothèse} \\
\text{''} & \Leftrightarrow & \dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{\overline{z_2}}{\overline{z_1}} & \\
\text{''} & \Leftrightarrow & \dfrac{z_2}{z_1} = \overline{\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)} & \\
\text{''} & \Leftrightarrow & \dfrac{z_2}{z_1} \in \mathbb{R} & \text{d'après la question 1.(a)}
\end{array}
$$

Nous avons retrouvé les caractérisations de l'orthogonalité et de la colinéarité à l'aide des nombres complexes :

$$
\boxed{\begin{array}{c}
\overrightarrow{v_1} \text{ et } \overrightarrow{v_2} \text{ sont orthogonaux} \Leftrightarrow \dfrac{z_2}{z_1} \in i\mathbb{R} \\
\overrightarrow{v_1} \text{ et } \overrightarrow{v_2} \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow \dfrac{z_2}{z_1} \in \mathbb{R}
\end{array}}
$$

3. (a) On sait que Δ_{AB} est l'ensemble des points du plan équidistants de A et B, on va de plus utiliser que $MA = |z-a|$ et $MB = |z-b|$:

$$
\begin{array}{lcll}
M \in \Delta_{AB} & \Leftrightarrow & MA = MB & \\
\text{''} & \Leftrightarrow & |z-a| = |z-b| & \\
\text{''} & \Leftrightarrow & |z-a|^2 = |z-b|^2 & \text{car les modules sont positifs} \\
\text{''} & \Leftrightarrow & (z-a)\overline{(z-a)} = (z-b)\overline{(z-b)} & \\
\text{''} & \Leftrightarrow & (z-a)(\overline{z}-\overline{a}) = (z-b)(\overline{z}-\overline{b}) & \text{d'après les propriétés de la conjugaison}
\end{array}
$$

$$\begin{aligned} M \in \Delta_{AB} \quad &\Leftrightarrow \quad z\overline{z} - a\overline{z} - \overline{a}z + a\overline{a} = z\overline{z} - b\overline{z} - \overline{b}z + b\overline{b} \\ &\Leftrightarrow \quad (\overline{b} - \overline{a})z + (b-a)\overline{z} = b\overline{b} - a\overline{a} \end{aligned}$$

Ce qui démontre le résultat souhaité :

$$\boxed{M \in \Delta_{AB} \Leftrightarrow (\overline{b} - \overline{a})z + (b-a)\overline{z} = b\overline{b} - a\overline{a}}$$

(b) Dans le calcul précédent, on n'a pas utilisé de propriétés particulières de A et B, ce sont juste deux points distincts du plan exactement comme le sont B et C. Il suffit de remplacer a par b et b par c dans l'expression précédente pour obtenir une équation complexe de Δ_{BC}. Ainsi :

$$\boxed{M \in \Delta_{BC} \Leftrightarrow (\overline{c} - \overline{b})z + (c-b)\overline{z} = c\overline{c} - b\overline{b}}$$

Avec le même raisonnement, on a également :

$$\boxed{M \in \Delta_{CA} \Leftrightarrow (\overline{a} - \overline{c})z + (a-c)\overline{z} = a\overline{a} - c\overline{c}}$$

(c) Remarquons que l'hypothèse de l'énoncé, A, B et C non alignés, permet de dire que A, B et C sont distincts deux à deux.

Par l'absurde, on suppose que $(\overline{b} - \overline{a})(c-a) - (\overline{c} - \overline{a})(b-a) = 0$. On divise cette relation par $(b-a)(\overline{b} - \overline{a})$ qui est non nul puisque A et B sont deux points distincts, il vient en utilisant la question 1.(a) :

$$\frac{c-a}{b-a} - \frac{\overline{c} - \overline{a}}{\overline{b} - \overline{a}} = 0 \Leftrightarrow \frac{c-a}{b-a} = \overline{\left(\frac{c-a}{b-a}\right)} \Leftrightarrow \frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}.$$

Or $c - a$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AC}$ et $b - a$ celle du vecteur $\overrightarrow{AB}$, ainsi d'après la question 2.(b) on en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. Ceci est absurde puisque A, B et C ne sont pas alignés. On a démontré que :

$$\boxed{(\overline{b} - \overline{a})(c-a) - (\overline{c} - \overline{a})(b-a) \neq 0}$$

(d) Tout vecteur directeur de Δ_{AB} est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et tout vecteur directeur de Δ_{CA} est orthogonal à $\overrightarrow{AC}$. Or $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires puisque A, B et C ne sont pas alignés, ceci montre que les droites Δ_{AB} et Δ_{CA} ne sont pas parallèles d'où :

$$\boxed{\Delta_{AB} \text{ et } \Delta_{CA} \text{ sont sécantes}}$$

(e) Un point M appartient à l'intersection des droites Δ_{AB} et Δ_{CA} si et seulement si l'affixe z de M vérifie l'équation de Δ_{AB} trouvée à la question 3.(a) et l'équation de Δ_{CA} déduite à la question 3.(b) :

$$M \in \Delta_{AB} \cap \Delta_{CA} \Leftrightarrow \begin{cases} (\overline{b} - \overline{a})z + (b-a)\overline{z} = b\overline{b} - a\overline{a} \\ (\overline{a} - \overline{c})z + (a-c)\overline{z} = a\overline{a} - c\overline{c} \end{cases}$$

L'énoncé donne une expression de z, ainsi il va s'agir d'éliminer les $\overline{z}$. Pour ce faire on peut multiplier la première équation par $(a-c)$ et la seconde par $(b-a)$ puis les soustraire cela donne :

$$[(\overline{b} - \overline{a})(a-c) - (\overline{a} - \overline{c})(b-a)]z = (b\overline{b} - a\overline{a})(a-c) - (a\overline{a} - c\overline{c})(b-a)$$

On peut ainsi isoler z :

$$\begin{aligned} z &= \frac{(b\overline{b}-a\overline{a})(a-c)-(a\overline{a}-c\overline{c})(b-a)}{(\overline{b}-\overline{a})(a-c)-(\overline{a}-\overline{c})(b-a)} \quad \text{le dénominateur étant non nul d'après 3.(c)} \\ &= \frac{ab\overline{b}-a^2\overline{a}-bc\overline{b}+ac\overline{a}-ab\overline{a}+bc\overline{c}+a^2\overline{a}-ac\overline{c}}{a\overline{b}-a\overline{a}-c\overline{b}+c\overline{a}-b\overline{a}+b\overline{c}+a\overline{a}-a\overline{c}} \\ &= \frac{ab(\overline{b}-\overline{a})+bc(\overline{c}-\overline{b})+ca(\overline{a}-\overline{c})}{a\overline{b}-b\overline{a}+b\overline{c}-c\overline{b}+c\overline{a}-a\overline{c}}. \end{aligned}$$

Un point M appartenant à $\Delta_{AB}\cap\Delta_{CA}$ a nécessairement pour affixe le complexe trouvé ci-dessus, or on a vu à la question 3.(d) que les droites Δ_{AB} et Δ_{CA} sont sécantes. Ainsi Δ_{AB} et Δ_{CA} se coupent en un unique point d'affixe :

$$\boxed{\omega = \frac{ab(\overline{b}-\overline{a})+bc(\overline{c}-\overline{b})+ca(\overline{a}-\overline{c})}{a\overline{b}-b\overline{a}+b\overline{c}-c\overline{b}+c\overline{a}-a\overline{c}}}$$

(f) Par le même calcul, il existe un unique point d'affixe $\widetilde{\omega}$ dans $\Delta_{BC}\cap\Delta_{AB}$ dont l'expression s'obtient en remplaçant a par b, b par c et c par a dans l'expression précédente, cela donne :

$$\widetilde{\omega} = \frac{bc(\overline{c}-\overline{b})+ca(\overline{a}-\overline{c})+ab(\overline{b}-\overline{a})}{b\overline{c}-c\overline{b}+c\overline{a}-a\overline{c}+a\overline{b}-b\overline{a}}$$

On remarque immédiatement que $\omega=\widetilde{\omega}$, c'est-à-dire que :

$$\boxed{\text{les médiatrices } \Delta_{AB},\ \Delta_{BC} \text{ et } \Delta_{CA} \text{ sont concourantes en un point } \Omega \text{ d'affixe } \omega}$$

B-Droite de Simson

Le but de cette partie est d'étudier l'alignement de 3 projetés orthogonaux selon la position du point que l'on projette. Ce résultat a été mis en évidence par Simson puis démontré par Wallace en 1799. À noter qu'il existe des démonstrations géométriques de ce résultat, même si le point de vue adopté ici est l'utilisation des nombres complexes.

1. Les points A, B et C vérifient les hypothèses de l'étude faite dans la partie précédente. Notons encore Ω d'affixe ω le point de concours des médiatrices du triangle ABC. Le point Ω est équidistant de A, B et C, posons $r=|\omega-a|=|\omega-b|=|\omega-c|$. On remarque que $r>0$ puisque par hypothèse le triangle n'est pas aplati. Ainsi le complexe $\dfrac{a-\omega}{r}$ est de module 1, on considère un de ses arguments $\alpha\in\mathbb{R}$, de sorte que :

$$\frac{a-\omega}{r}=e^{i\alpha} \Leftrightarrow a=\omega+re^{i\alpha}.$$

On applique le même raisonnement pour b et c, on obtient également l'existence de $(\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^2$ tels que :

$$\boxed{\begin{aligned} a&=\omega+re^{i\alpha}\\ b&=\omega+re^{i\beta}\\ c&=\omega+re^{i\gamma}\end{aligned}}$$

La relation $r=|\omega-a|=|\omega-b|=|\omega-c|$ montre que A, B et C se situent sur le cercle de centre Ω et de rayon r. Ce cercle, Γ, s'appelle le cercle circonscrit au triangle ABC.

2. Utilisons l'écriture trouvée à la question précédente :

$$\begin{aligned} b-a &= \omega + re^{i\beta} - (\omega + re^{i\alpha}) \\ &= r(e^{i\beta} - e^{i\alpha}) \qquad \text{pour continuer la factorisation, on passe à l'angle moitié :} \\ &= re^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}(e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}} - e^{-i\frac{\beta-\alpha}{2}}) \\ &= 2ir\sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \\ &= 2r\sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha+\beta+\pi}{2}} \qquad \text{en utilisant } \ i = e^{i\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

Pour continuer l'étude deux cas sont à considérer :

$\star$ Si $\sin\left(\dfrac{\beta-\alpha}{2}\right) > 0$, alors :

$$\boxed{\begin{array}{c} |b-a| = 2r\sin\left(\dfrac{\beta-\alpha}{2}\right) \\ \text{un argument de } b-a \text{ est } \dfrac{\alpha+\beta+\pi}{2} \end{array}}$$

$\star$ Si $\sin\left(\dfrac{\beta-\alpha}{2}\right) < 0$, en utilisant $-1 = e^{i\pi}$, on a la réécriture : $b-a = -2r\sin\left(\dfrac{\beta-\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha+\beta+3\pi}{2}}$, ainsi :

$$\boxed{\begin{array}{c} |b-a| = -2r\sin\left(\dfrac{\beta-\alpha}{2}\right) \\ \text{un argument de } b-a \text{ est } \dfrac{\alpha+\beta+3\pi}{2} \end{array}}$$

Supposons $\alpha = \beta \ [2\pi]$ alors $e^{i\alpha} = e^{i\beta}$ et d'après la question 1. cela montre que $a = b$. Ceci est exclu puisque A et B sont distincts. Avec le même raisonnement pour β et γ puis pour α et γ, on obtient :

$$\boxed{\alpha,\ \beta \text{ et } \gamma \text{ sont distincts deux à deux modulo } 2\pi}$$

3. (a) Par définition du projeté orthogonal, le vecteur $\overrightarrow{MA'}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{BC}$. Par construction $A' \in (BC)$ donc $\overrightarrow{BA'}$ est colinéaire à $\overrightarrow{BC}$ et, de même, $\overrightarrow{CA'}$ est colinéaire à $\overrightarrow{BC}$. Pour résumer :

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \overrightarrow{MA'} & \text{est orthogonal à} & \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BA'} & \text{est colinéaire à} & \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{CA'} & \text{est colinéaire à} & \overrightarrow{BC} \end{array}}$$

(b) L'idée va être d'utiliser le même type de factorisation qu'à la question 2., ainsi il sera aisé de simplifier le quotient proposé, on a :

$$c-b = \omega + re^{i\gamma} - (\omega + re^{i\beta}) = r(e^{i\gamma} - e^{i\beta}) = 2ir\sin\left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right)e^{i\frac{\gamma+\beta}{2}}$$

en conjuguant cette expression : $\bar{c} - \bar{b} = -2ir\sin\left(\dfrac{\gamma-\beta}{2}\right)e^{-i\frac{\gamma+\beta}{2}}$. Cette dernière expression est non nulle puisque, r étant strictement positif, on a :

$$\bar{c} - \bar{b} = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\gamma-\beta}{2} = 0 \ [\pi] \Leftrightarrow \gamma = \beta \ [2\pi],$$

ceci est exclu d'après la question 2. On peut donc diviser par $\overline{c} - \overline{b}$, on obtient :

$$\frac{c-b}{\overline{c}-\overline{b}} = \frac{2ir\sin(\frac{\gamma-\beta}{2})e^{i\frac{\gamma+\beta}{2}}}{-2ir\sin(\frac{\gamma-\beta}{2})e^{-i\frac{\gamma+\beta}{2}}}$$

En simplifiant, on obtient :

$$\boxed{\frac{c-b}{\overline{c}-\overline{b}} = -e^{i(\gamma+\beta)}}$$

(c) Remarquons que les affixes des vecteurs $\overrightarrow{MA'}$, $\overrightarrow{BA'}$, $\overrightarrow{CA'}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont respectivement $a'-z$, $a'-b$, $a'-c$ et $c-b$. D'après les résultats obtenus dans la partie A question 2.(a), les relations entre les vecteurs ci-dessus obtenues à la question 3.(a) se réécrivent :

$$\begin{array}{llll}
\overrightarrow{MA'} \text{ est orthogonal à } \overrightarrow{BC} & \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{MA'}.\overrightarrow{BC} = 0 & \Leftrightarrow \quad (a'-z)(\overline{c}-\overline{b}) + (\overline{a'}-\overline{z})(c-b) = 0 & (1) \\
\overrightarrow{BA'} \text{ est colinéaire à } \overrightarrow{BC} & \Leftrightarrow \quad \det(\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BC}) = 0 & \Leftrightarrow \quad (a'-b)(\overline{c}-\overline{b}) - (\overline{a'}-\overline{b})(c-b) = 0 & (2) \\
\overrightarrow{CA'} \text{ est colinéaire à } \overrightarrow{BC} & \Leftrightarrow \quad \det(\overrightarrow{CA'}, \overrightarrow{BC}) = 0 & \Leftrightarrow \quad (a'-c)(\overline{c}-\overline{b}) - (\overline{a'}-\overline{c})(c-b) = 0 & (3)
\end{array}$$

L'expression à obtenir ne possède plus de terme en $\overline{a'}$, c'est pour cela qu'il semble judicieux d'ajouter les relations (1) et (2), nous obtenons :

$$2a'(\overline{c}-\overline{b}) - (b+z)(\overline{c}-\overline{b}) + (\overline{b}-\overline{z})(c-b) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a' = \frac{b+z}{2} + \frac{\overline{z}-\overline{b}}{2} \times \frac{c-b}{\overline{c}-\overline{b}} \qquad \text{on a bien } \ \overline{c}-\overline{b} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a' = \frac{z+b}{2} - \frac{\overline{z}-\overline{b}}{2}e^{i(\beta+\gamma)} \qquad \text{ceci en utilisant la question précédente.}$$

Pour obtenir l'autre relation souhaitée, on ajoute (1) et (3), on trouve par le même type de calcul :

$$a' = \frac{z+c}{2} - \frac{\overline{z}-\overline{c}}{2}e^{i(\beta+\gamma)}.$$

On a bien démontré :

$$\boxed{a' = \frac{z+b}{2} - \frac{\overline{z}-\overline{b}}{2}e^{i(\beta+\gamma)} = \frac{z+c}{2} - \frac{\overline{z}-\overline{c}}{2}e^{i(\beta+\gamma)}}$$

(d) Les rôles joués par A, B et C sont symétriques, on peut remplacer A par B, B par C, C par A et A' par B' pour obtenir une expression de b'. On remplace enfin A par C, B par A, C par B et A' par C' pour obtenir une expression de c'. Plus explicitement, on a :

$$\boxed{\begin{array}{l}
b' = \dfrac{z+c}{2} - \dfrac{\overline{z}-\overline{c}}{2}e^{i(\alpha+\gamma)} = \dfrac{z+a}{2} - \dfrac{\overline{z}-\overline{a}}{2}e^{i(\alpha+\gamma)} \\
c' = \dfrac{z+a}{2} - \dfrac{\overline{z}-\overline{a}}{2}e^{i(\beta+\alpha)} = \dfrac{z+b}{2} - \dfrac{\overline{z}-\overline{b}}{2}e^{i(\beta+\alpha)}
\end{array}}$$

4. (a) Supposons donc M différent de B, c'est-à-dire $z \neq b$. D'après les questions 3.(c) et 3.(d), nous avons :

$$\begin{aligned}
a' - c' &= \frac{z+b}{2} - \frac{\overline{z}-\overline{b}}{2}e^{i(\beta+\gamma)} - \Big(\frac{z+b}{2} - \frac{\overline{z}-\overline{b}}{2}e^{i(\beta+\alpha)}\Big) \\
&= \frac{\overline{z}-\overline{b}}{2}(e^{i(\beta+\alpha)} - e^{i(\beta+\gamma)}) \\
&= \frac{\overline{z}-\overline{b}}{2}e^{i\beta}(e^{i\alpha} - e^{i\gamma}) \\
&= \frac{\overline{z}-\overline{b}}{2}e^{i\beta}e^{i\frac{\alpha+\gamma}{2}}(e^{i\frac{\alpha-\gamma}{2}} - e^{-i\frac{\alpha-\gamma}{2}}) \\
&= 2i\frac{\overline{z}-\overline{b}}{2}e^{i\beta}\sin\Big(\frac{\alpha-\gamma}{2}\Big)e^{i\frac{\alpha+\gamma}{2}}
\end{aligned}$$

Afin de pouvoir diviser par $a'-c'$ remarquons tout de suite que $\overline{z} \neq \overline{b}$ et $\sin\Big(\dfrac{\alpha-\gamma}{2}\Big) \neq 0$ puisque $\alpha \neq \gamma$ $[2\pi]$. Par un calcul tout à fait similaire, nous obtenons :

$$c' - b' = 2i\frac{\overline{z}-\overline{a}}{2}e^{i\alpha}\sin\Big(\frac{\gamma-\beta}{2}\Big)e^{i\frac{\beta+\gamma}{2}}$$

Il reste à faire le quotient de ces deux quantités :

$$\frac{c'-b'}{a'-c'} = \frac{2i(\frac{\overline{z}-\overline{a}}{2})e^{i\alpha}\sin(\frac{\gamma-\beta}{2})e^{i\frac{\beta+\gamma}{2}}}{2i(\frac{\overline{z}-\overline{b}}{2})e^{i\beta}\sin(\frac{\alpha-\gamma}{2})e^{i\frac{\alpha+\gamma}{2}}} = e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} \times \frac{\sin(\frac{\gamma-\beta}{2})}{\sin(\frac{\alpha-\gamma}{2})} \times \frac{\overline{z}-\overline{a}}{\overline{z}-\overline{b}}$$

On obtient le résultat attendu :

$$\boxed{\frac{c'-b'}{a'-c'} = e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} \times \frac{\sin(\frac{\gamma-\beta}{2})}{\sin(\frac{\alpha-\gamma}{2})} \times \frac{\overline{z}-\overline{a}}{\overline{z}-\overline{b}}}$$

(b) On utilise les expressions obtenues à la question 1. :

$$\begin{aligned}
\overline{a}e^{i(\alpha-\beta)} - \overline{b} &= (\overline{\omega} + re^{-i\alpha})e^{i(\alpha-\beta)} - (\overline{\omega} + re^{-i\beta}) \\
&= \overline{\omega}(e^{i(\alpha-\beta)} - 1).
\end{aligned}$$

En procédant de même pour $be^{i(\alpha-\beta)} - a$, on obtient :

$$\boxed{\begin{array}{l} \overline{a}e^{i(\alpha-\beta)} - \overline{b} = \overline{\omega}(e^{i(\alpha-\beta)} - 1) \\ be^{i(\alpha-\beta)} - a = \omega(e^{i(\alpha-\beta)} - 1) \end{array}}$$

(c) On utilise là-aussi les expressions de a et b trouvées dans la question 1. :

$$\begin{aligned}
\overline{a}be^{i(\alpha-\beta)} - a\overline{b} &= (\overline{\omega} + re^{-i\alpha})(\omega + re^{i\beta})e^{i(\alpha-\beta)} - (\omega + re^{i\alpha})(\overline{\omega} + re^{-i\beta}) \\
&= \omega\overline{\omega}e^{i(\alpha-\beta)} + r\overline{\omega}e^{i\beta}e^{i(\alpha-\beta)} + r\omega e^{-i\alpha}e^{i(\alpha-\beta)} + r^2 - \omega\overline{\omega} - r\omega e^{-i\beta} - r\overline{\omega}e^{i\alpha} - r^2e^{i(\alpha-\beta)} \\
&= (\omega\overline{\omega} - r^2)(e^{i(\alpha-\beta)} - 1).
\end{aligned}$$

On a :

$$\boxed{\overline{a}be^{i(\alpha-\beta)} - a\overline{b} = (\omega\overline{\omega} - r^2)(e^{i(\alpha-\beta)} - 1)}$$

5. Il s'agit d'examiner en détail l'expression trouvée à la question 4.(a), déjà le facteur $\dfrac{\sin(\frac{\gamma-\beta}{2})}{\sin(\frac{\alpha-\gamma}{2})}$ est réel, ainsi :

$$\begin{array}{rcl}
\dfrac{c'-b'}{a'-c'} \in \mathbb{R} & \Leftrightarrow & e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}\dfrac{\overline{z}-\overline{a}}{\overline{z}-\overline{b}} \in \mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}\dfrac{\overline{z}-\overline{a}}{\overline{z}-\overline{b}} = e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}\dfrac{z-a}{z-b} \\
\text{"} & \Leftrightarrow & e^{i(\alpha-\beta)}(\overline{z}-\overline{a})(z-b) = (z-a)(\overline{z}-\overline{b}) \\
\text{"} & \Leftrightarrow & (e^{i(\alpha-\beta)}-1)z\overline{z} - (\overline{a}e^{i(\alpha-\beta)} - \overline{b})z - (be^{i(\alpha-\beta)} - a)\overline{z} + \overline{a}be^{i(\alpha-\beta)} - a\overline{b} = 0 \\
\text{et avec 4.(b) et 4.(c)} & \Leftrightarrow & (e^{i(\alpha-\beta)}-1)z\overline{z} - (e^{i(\alpha-\beta)}-1)\overline{\omega}z - (e^{i(\alpha-\beta)}-1)\omega\overline{z} + (\omega\overline{\omega}-r^2)(e^{i(\alpha-\beta)}-1) = 0 \\
\text{"} & \Leftrightarrow & z\overline{z} - \overline{\omega}z - \omega\overline{z} + \omega\overline{\omega} - r^2 = 0
\end{array}$$

La dernière équivalence étant obtenue en divisant par $e^{i(\alpha-\beta)} - 1$ qui est non nul puisque α et β sont distincts modulo 2π. Ainsi :

$$\boxed{\frac{c'-b'}{a'-c'} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z\overline{z} - \overline{\omega}z - \omega\overline{z} + \omega\overline{\omega} - r^2 = 0}$$

6. Traitons pour commencer $M = B$ exclu dans les deux questions précédentes. On procède par double implication :
($\Rightarrow$) On suppose A', B' et C' alignés. Si $M = B$, il est clair que M appartient au cercle circonscrit au triangle ABC.
($\Leftarrow$) Réciproquement, on suppose que $M \in \Gamma$. Si $M = B$ alors, par construction, $A' = C' = B$, il est donc clair que A', B' et C' sont alignés.
Ce qui démontre l'équivalence souhaitée dans la cas où $M = B$.
Plaçons-nous à présent dans le cas général où $M \neq B$, l'étude faite aux questions 4. et 5. s'applique. Le point crucial est de remarquer que l'équation de la question 5. se réécrit :

$$z\overline{z} - \overline{\omega}z - \omega\overline{z} + \omega\overline{\omega} - r^2 = 0 \Leftrightarrow (z-\omega)(\overline{z}-\overline{\omega}) = r^2 \Leftrightarrow (z-\omega)\overline{(z-\omega)} = r^2 \Leftrightarrow |z-w|^2 = r^2.$$

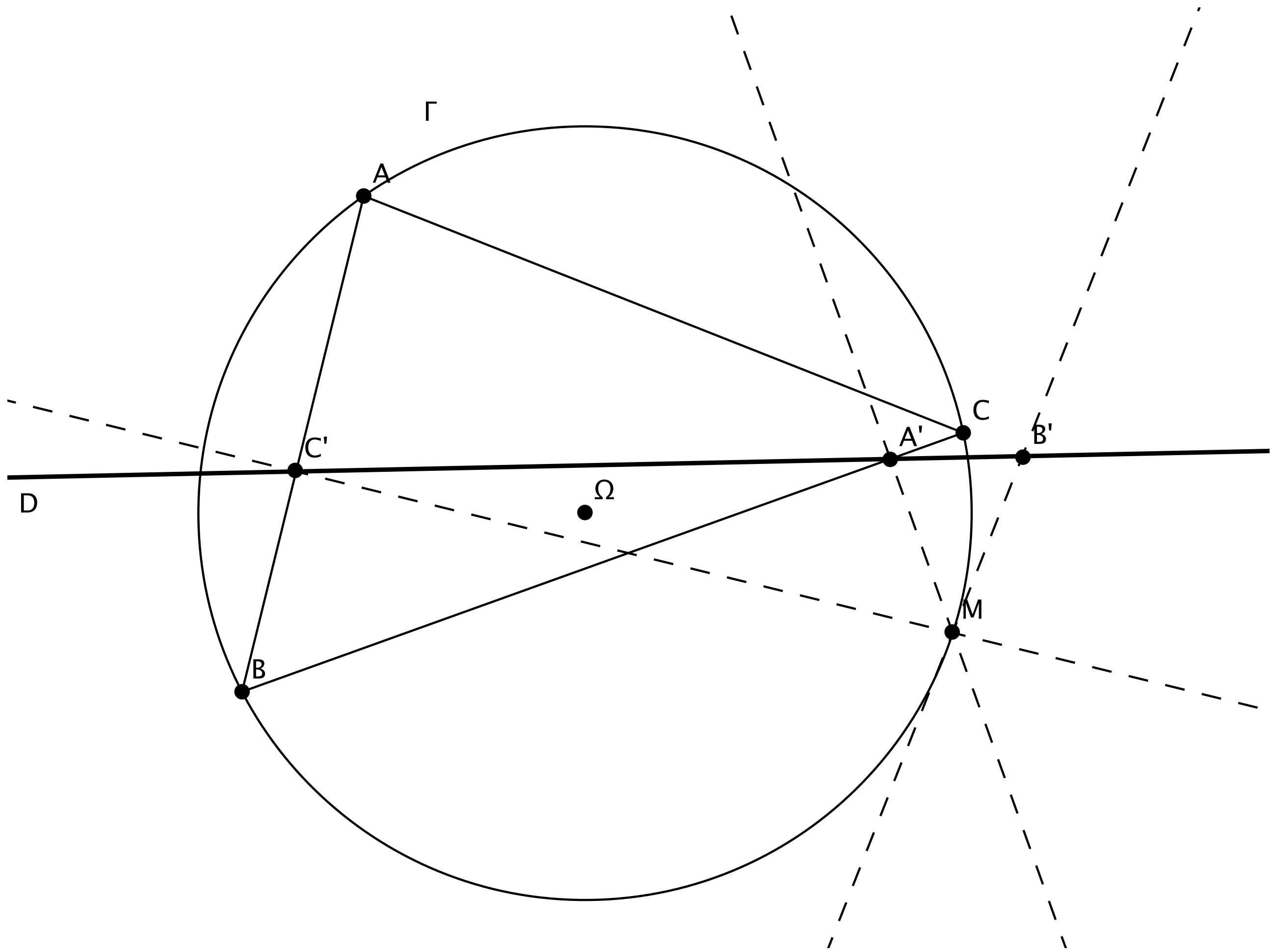
On a ainsi en vertu de la caractérisation de la colinéarité obtenue dans la partie A :

$$A', B' \text{ et } C' \text{ sont alignés } \Leftrightarrow \frac{c'-b'}{a'-c'} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |z-w|^2 = r^2 \Leftrightarrow M \in \Gamma.$$

D'où le résultat souhaité :

$$\boxed{A', B' \text{ et } C' \text{ sont alignés si et seulement si } M \text{ appartient à } \Gamma}$$

Voici un graphique illustrant cette situation, la droite de Simson est notée D.



C-Droite de Steiner

Le but de cette partie est de mettre en évidence une nouvelle configuration géométrique d'alignement qui se déduit de la précédente via une homothétie. Elle utilise de façon cruciale les résultats et calculs de la partie B.

1. L'expression de h étant symétrique en α, β et γ, nous allons nous contenter de vérifier que $\overrightarrow{AH}$ est orthogonal à $\overrightarrow{BC}$, on aura de façon analogue $\overrightarrow{BH}$ est orthogonal à $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CH}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$. Cela démontrera bien que H appartient aux trois hauteurs du triangle ABC. L'affixe de $\overrightarrow{AH}$ est $h-a$ et l'affixe de $\overrightarrow{BC}$ est $c-b$, en utilisant la caractérisation de l'orthogonalité démontrée dans la partie A, on a :

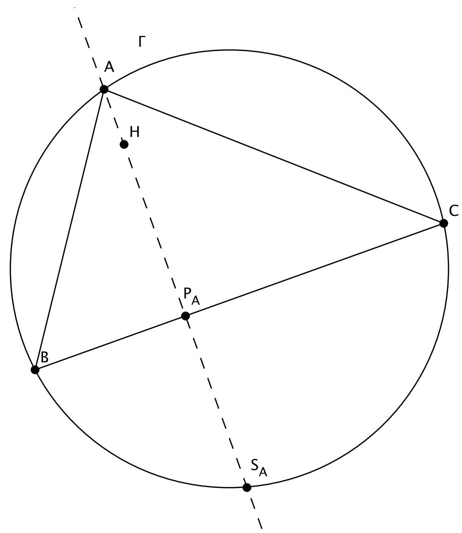
$$\begin{array}{rcl}
\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} & \Leftrightarrow & (h-a)(\overline{c}-\overline{b})+(\overline{h}-\overline{a})(c-b)=0 \\
" & \Leftrightarrow & [r(e^{i\beta}+e^{i\gamma})][r(e^{-i\gamma}-e^{-i\beta})]+[r(e^{-i\beta}+e^{-i\gamma})][r(e^{i\gamma}-e^{i\beta})]=0 \\
" & \Leftrightarrow & r^2[e^{i(\beta-\gamma)}-1+1-e^{-i(\beta-\gamma)}+e^{-i(\beta-\gamma)}-1+1-e^{i(\beta-\gamma)}]=0 \\
" & \Leftrightarrow & 0=0.
\end{array}$$

$$\boxed{H \text{ d'affixe } h=\omega+r(e^{i\alpha}+e^{i\beta}+e^{i\gamma}) \text{ est l'orthocentre du triangle } ABC}$$

2. Notons P_A le projeté orthogonal de A sur (BC), on a (AP_A) qui est ainsi une hauteur du triangle ABC. D'après la question 3.(c) de la partie B, on connaît une expression de l'affixe p_A de P_A :

$$p_A=\frac{a+b}{2}-\frac{\overline{a}-\overline{b}}{2}e^{i(\beta+\gamma)}=\frac{a+c}{2}-\frac{\overline{a}-\overline{c}}{2}e^{i(\beta+\gamma)}.$$

Pour obtenir cette expression, on a simplement remplacé z par a puisque l'on projette le point A et non plus le point M.
Notons S_A le symétrique orthogonal de H par rapport à (BC), comme P_A est aussi le projeté orthogonal de H sur (BC), on : $\overrightarrow{HS_A} = 2\overrightarrow{HP_A}$.
Voici un dessin représentant la situation :



On traduit cette dernière relation avec les affixes, en notant s_A l'affixe de S_A, on a $s_A - h = 2(p_A - h)$, c'est-à-dire en utilisant l'expression de p_A obtenue ci-dessus :

$$\begin{aligned} s_A &= 2p_A - h \\ &= a + c - (\overline{a} - \overline{c})e^{i(\beta+\gamma)} - w - r(e^{i\alpha} + e^{i\beta} + e^{i\gamma}) \\ &= \omega + re^{i\alpha} + \omega + re^{i\gamma} - (re^{-i\alpha} - re^{-i\gamma})e^{i(\beta+\gamma)} - w - r(e^{i\alpha} + e^{i\beta} + e^{i\gamma}) \\ &= \omega - re^{i(\beta+\gamma-\alpha)}. \end{aligned}$$

Au cours de ce calcul, on a utilisé : $a = \omega + re^{i\alpha}$ et $c = \omega + re^{i\gamma}$ relations trouvées au début de la partie B.
On a alors $|s_A - \omega| = r$ ce qui montre que $S_A \in \Gamma$. Toujours d'après la symétrie entre A, B et C, on a :

$\boxed{\text{les symétriques orthogonaux de } H \text{ par rapport aux trois côtés du triangle appartiennent à } \Gamma}$

3. (a) Par construction, on a :

$$\begin{aligned} A' \text{ est le milieu de } [MA''] &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA''} = 2\overrightarrow{MA'} \\ B' \text{ est le milieu de } [MB''] &\Leftrightarrow \overrightarrow{MB''} = 2\overrightarrow{MB'} \\ C' \text{ est le milieu de } [MC''] &\Leftrightarrow \overrightarrow{MC''} = 2\overrightarrow{MC'} \end{aligned}$$

On a aussi évidemment $\overrightarrow{MM} = 2\overrightarrow{MM}$. Ainsi :

$\boxed{\text{l'homothétie de centre } M \text{ et de rapport 2 transforme } M \text{ en } M,\ A' \text{ en } A'',\ B' \text{ en } B'' \text{ et } C' \text{ en } C''}$

(b) On note a'', b'' et c'' les affixes respectives de A'', B'' et C'', la traduction à l'aide des nombres complexes de l'homothétie précédente est : $a'' - z = 2(a' - z)$, c'est-à-dire $a'' = 2a' - z$. De même $b'' = 2b' - z$ et $c'' = 2c' - z$. Distinguons deux cas :

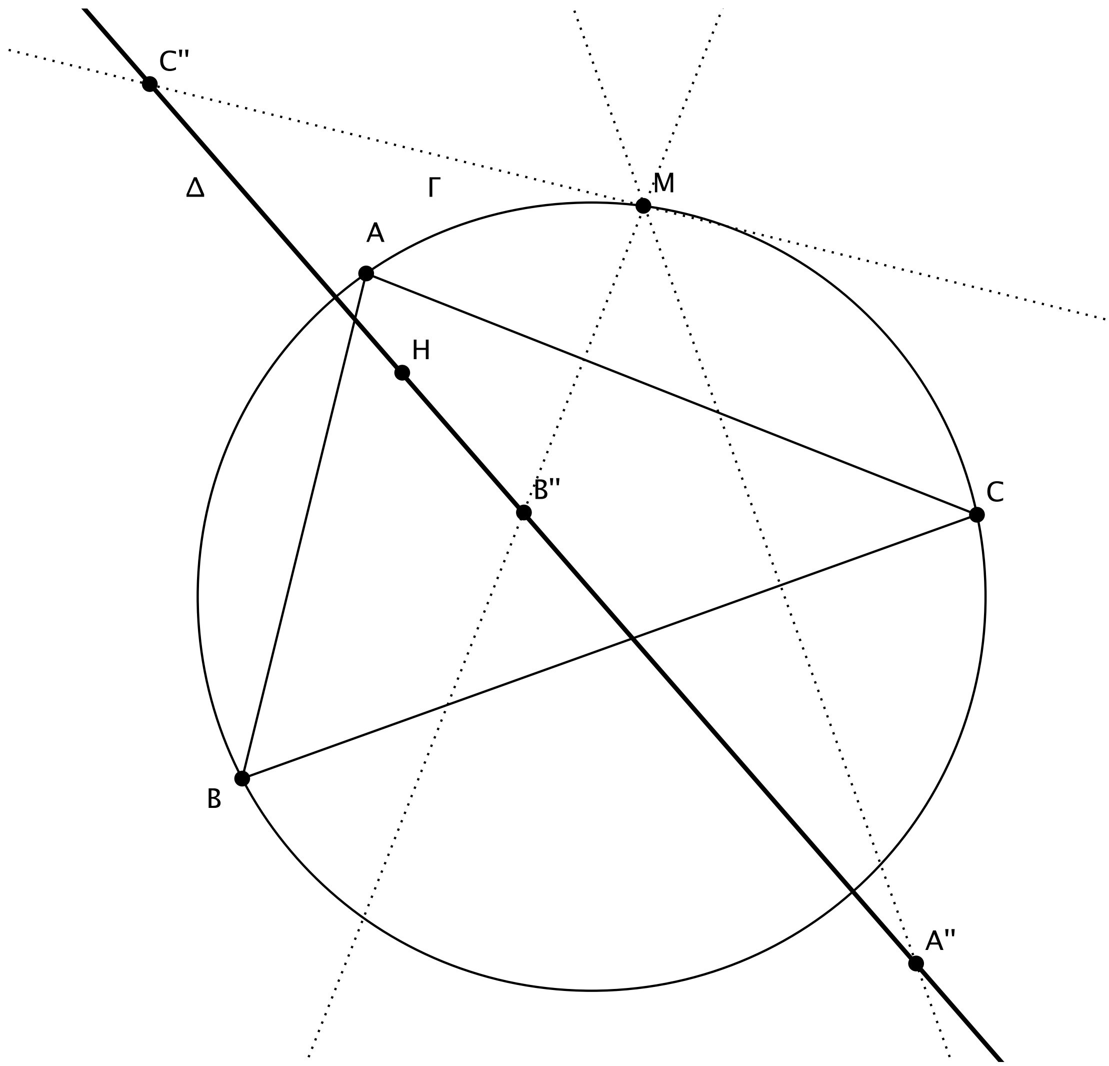
- $\star$ Si $A'' = B''$, alors il est clair que A'', B'' et C'' sont alignés.
- $\star$ Si $A'' \neq B''$, on a :

$$\frac{c'' - a''}{b'' - a''} = \frac{2c' - z - (2a' - z)}{2b' - z - (2a' - z)} = \frac{c' - a'}{b' - a'} \in \mathbb{R}$$

car on sait, d'après la partie B, que A', B' et C' sont alignés puisque $M \in \Gamma$. Ainsi $\dfrac{c'' - a''}{b'' - a''} \in \mathbb{R}$ signifie que $\overrightarrow{A''C''}$ et $\overrightarrow{A''B''}$ sont colinéaires.

$$\boxed{\text{Les points } A'',\ B'' \text{ et } C'' \text{ sont alignés}}$$

Voici un dessin représentant la situation, la droite de Steiner est notée Δ :



(c) Si $M = B$ le résultat est clair puisque dans ce cas $A'' = C'' = B$ et la droite de Steiner de B est la droite (BB'') qui passe par H puisque c'est une hauteur. Plaçons-nous dans la suite de cette question dans le cas où $M \neq B$, on a alors $A' \neq C'$ d'après la question 4.(a) de la partie B. Le vecteur $\overrightarrow{A''C''} = 2\overrightarrow{A'C'}$ est donc non nul, c'est un vecteur directeur de la droite de Steiner de M qui est parallèle à la droite de Simson de M. Il reste à démontrer que $\overrightarrow{A''H}$ est colinéaire à $\overrightarrow{A''C}$, ainsi H appartiendra à la droite de Steiner de M. On a d'après les calculs faits à la question 4.(a) de la partie B :

$$c'' - a'' = 2(c' - a') = 2i(\overline{b} - \overline{z}) \sin\left(\frac{\alpha - \gamma}{2}\right) e^{i\beta} e^{i\frac{\alpha+\gamma}{2}}.$$

D'autre part d'après l'étude menée dans le début de la partie C, on a :

$$h - a'' = \omega + r(e^{i\alpha} + e^{i\beta} + e^{i\gamma}) - 2a' + z.$$

Comme $M \in \Gamma$, on peut trouver avec un raisonnement analogue à celui de la question 1. de la partie B, $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = \omega + re^{i\theta}$, de plus d'après la question 3.(c) de la partie B, on a :

$$\begin{aligned}
c'' - a'' &= 2ie^{i(\beta + \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2})} \sin\left(\frac{\alpha - \gamma}{2}\right)(\overline{\omega} + re^{-i\beta} - \overline{\omega} - re^{-i\theta}) \quad \text{on passe à l'angle moitié :} \\
&= 2ire^{i(\beta + \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2})} \sin\left(\frac{\alpha - \gamma}{2}\right) e^{-i(\frac{\beta+\theta}{2})}(2i \sin(\frac{\theta - \beta}{2})) \\
&= 4r \sin(\frac{\alpha - \gamma}{2}) \sin\left(\frac{\beta - \theta}{2}\right) e^{i\frac{\alpha+\beta+\gamma-\theta}{2}}
\end{aligned}$$

Simplifions aussi $h - a''$, cela donne :

$$\begin{aligned}
h - a'' &= \omega + r(e^{i\alpha} + e^{i\beta} + e^{i\gamma}) - z - c + (\overline{z} - \overline{c})e^{i(\beta+\gamma)} + z \\
&= \omega + re^{i\alpha} + re^{i\beta} + re^{i\gamma} - \omega - re^{i\gamma} + (\overline{\omega} + re^{-i\theta} - \overline{\omega} - re^{-i\gamma})e^{i(\beta+\gamma)} \\
&= r(e^{i\alpha} + e^{i\beta} + e^{i(\beta+\gamma-\theta)} - e^{i\beta}) \\
&= re^{i\frac{\alpha+\beta+\gamma-\theta}{2}} 2\cos\left(\frac{\alpha + \beta + \gamma - \theta}{2}\right)
\end{aligned}$$

On a ainsi : $\dfrac{h - a''}{c'' - a''} = \dfrac{\cos(\frac{\alpha+\beta+\gamma-\theta}{2})}{2\sin(\frac{\alpha-\gamma}{2})\sin(\frac{\beta-\theta}{2})} \in \mathbb{R}$, donc $\overrightarrow{A''H}$ est colinéaire à $\overrightarrow{A''C''}$. Ce qui démontre que :

$$\boxed{H \text{ est bien sur la droite de Steiner de } M}$$

Robert Simson *est un mathématicien Ecossais du 18ième siècle. Il a notamment traduit et expliqué les travaux géométriques d'Euclide. Il fut également le premier à remarquer que le quotient de deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci tend vers le nombre d'or.*

Jacob Steiner *est un mathématicien Suisse du 19ième siècle, à 14 ans il ne savait pas lire et ne s'initia aux mathématiques qu'à 17 ans. Les travaux de Steiner concernent essentiellement la géométrie.*