

23 ★ Soit $\theta \in \mathbb{R}$, linéariser l'expression :

$$A = \sin^6(\theta) + \cos^4(\theta) \sin^2(\theta)$$

Corrigé : On procède par étapes en commençant à linéariser $\sin^6(\theta)$. En utilisant les formules d'Euler et la ligne 6 du triangle de Pascal qui est 1 6 15 20 15 6 1, on a :

$$\begin{aligned} \sin^6(\theta) &= \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^6 \\ &= -\frac{1}{64} (e^{i\theta} - e^{-i\theta})^6 \\ &= -\frac{1}{64} (e^{6i\theta} - 6e^{4i\theta} + 15e^{2i\theta} - 20 + 15e^{-2i\theta} - 6e^{-4i\theta} + e^{-6i\theta}) \end{aligned}$$

On regroupe ensuite les termes deux par deux :

$$\sin^6(\theta) = -\frac{1}{64} (e^{6i\theta} - 6e^{4i\theta} + 15e^{2i\theta} - 20 + 15e^{-2i\theta} - 6e^{-4i\theta} + e^{-6i\theta})$$

Sachant que $e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} = 2\cos(\alpha)$, nous obtenons donc :

$$\sin^6(\theta) = -\frac{1}{64} (2\cos(6\theta) - 12\cos(4\theta) + 30\cos(2\theta) - 20)$$

En simplifiant par 2 :

$$\sin(6\theta) = -\frac{1}{32} (\cos(6\theta) - 6\cos(4\theta) + 15\cos(2\theta) - 10)$$

D'autre part et en suivant la même méthode, on a :

$$\begin{aligned} \cos^4(\theta) \sin^2(\theta) &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^4 \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^2 \\ &= \frac{1}{16} (e^{4i\theta} + 4e^{2i\theta} + 6 + 4e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta}) \times \frac{1}{-4} (e^{2i\theta} - 2 + e^{-2i\theta}) \\ &= -\frac{1}{64} (e^{6i\theta} - 2e^{4i\theta} + e^{2i\theta} + 4e^{4i\theta} - 8e^{2i\theta} + 4 + 6e^{2i\theta} - 12 + 6e^{-2i\theta} + 4 - 8e^{-2i\theta} + 4e^{-4i\theta} + e^{-2i\theta} - 2e^{-4i\theta} + e^{-6i\theta}) \\ &= -\frac{1}{64} (e^{6i\theta} + 2e^{4i\theta} - e^{2i\theta} - 4e^{-2i\theta} + 2e^{-4i\theta} + e^{-6i\theta}) \\ &= -\frac{1}{64} (2\cos(6\theta) + 4\cos(4\theta) - 2\cos(2\theta) - 4) \\ &= -\frac{1}{32} (\cos(6\theta) + 2\cos(4\theta) - \cos(2\theta) - 2) \end{aligned}$$

Il reste à sommer les deux expressions :

$$\sin^6(\theta) + \cos^4(\theta) \sin^2(\theta) = \frac{1}{16} (-\cos(6\theta) + 2\cos(4\theta) - 7\cos(2\theta) + 6)$$