Irrationnalité et densité

1 Soit $(x,y) \in (\mathbb{Q}_+)^2$ avec $\sqrt{x} \notin \mathbb{Q}$. Montrer que $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ est irrationnel.

2 Démontrer que $\sqrt{2}+\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

3 ★ Pour $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$A_n = \{r^n,\ r \in \mathbb{Q}\}$$

Donner une condition nécessaire et suffisante afin que A_n soit dense dans $\mathbb{R}$.

4 ♡★ Démontrer que la partie A est dense dans $[0,1]$:

$$A = \left\{\frac{k}{2^n},\ n \in \mathbb{N} \text{ et } k \in [\![0, 2^n]\!]\right\}$$

5 ★★ Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 1$ un irrationnel. Démontrer que :

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{x} \right\rfloor = n-1$$

Partie entière

6 ♡★ Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+4}{4} \right\rfloor = n$$

7 ♡★ On pose $f : x \mapsto \lfloor 2x \rfloor - \lfloor x \rfloor - \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$.

a) Démontrer que f est périodique.
b) Démontrer que f est nulle sur $[0,1[$.
c) En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor 2x \rfloor - \lfloor x \rfloor = \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

d) Soit $x \in \mathbb{R}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \frac{x+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor$.

8 ★★ Résoudre l'équation (E) : $\lfloor 2x-3 \rfloor = \lfloor x+1 \rfloor$.

Borne supérieure

9 ♡★★ Soient A et B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$. On pose :

$$A+B = \{a+b,\ a \in A, b \in B\}$$

Montrer que $A+B$ est possède une borne supérieure et que :

$$\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$$

10 ★★ Soit $A = \left\{\frac{m}{n} + \frac{4n}{m},\ (m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2\right\}$. Déterminer, si elles existent, la borne supérieure et la borne inférieure de A.

Défis

D1 ★★ Pour $n \in [\![1,7]\!]$ et à l'aide de la partie entière, trouver une formule donnant le nombre d'éléments de la ligne n du tableau périodique des éléments.

D2 ★★★★ Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor$$