1-Vrai ou faux : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k\Big)$.

2-Vrai ou faux : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k^{-1} = \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big)^{-1}$.

3-Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle S = \sum_{k=0}^{n}(2k - n + 2)$.

4-Soit $E = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2,\ i + j = 3\}$, calculer $\displaystyle\sum_{(i,j)\in E} (i^2 + j^2)$.

5-Calculer $\displaystyle S = \sum_{k=5}^{10} k$.

6-Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle S_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k$

1-Vrai ou faux : $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k\Big)$.

Réponse : C'est faux en général, par exemple :

$$2 \times 3 + 3 \times 4 \neq (2+3) \times (3+4)$$

2-Vrai ou faux : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k^{-1} = \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big)^{-1}$.

Réponse : C'est faux en général, par exemple :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \neq \frac{1}{2+3}$$

3-Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $S = \sum_{k=0}^{n}(2k - n + 2)$.

Réponse : Par linéarité de la somme, on a :

$$S = 2\sum_{k=0}^{n} k - \sum_{k=0}^{n} n + 2\sum_{k=0}^{n} 1$$

On sait calculer toutes ces sommes :

$$S = 2\frac{n(n+1)}{2} - (n+1)n + 2(n+1)$$

Après simplifications, on trouve donc :

$$S = 2(n+1)$$

4-Soit $E = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2,\ i+j=3\}$, calculer $\displaystyle\sum_{(i,j)\in E} (i^2+j^2)$.

Réponse : Il y a 4 éléments dans E, ce sont les couples : $(0,3)$, $(1,2)$, $(2,1)$ et $(3,0)$. Ainsi :

$$\sum_{(i,j)\in E} (i^2+j^2) = (0^2+3^2)+(1^2+2^2)+(2^2+1^2)+(3^2+0^2) = 28$$

5-Calculer $S = \sum_{k=5}^{10} k$.

Réponse : On a :

$$S = \sum_{k=1}^{10} k - \sum_{k=1}^{4} k = \frac{10 \times 11}{2} - \frac{4 \times 5}{2} = 45$$

6-Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k$

Réponse : • Si n est un entier pair, il y a autant de k pair que de k impair dans la somme, par conséquent $S_n = 0$.

• Si n est impair, il y a un terme avec k impair en plus ainsi $S_n = -1$.

Finalement :

$$S_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ -1 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$