1. À quoi est égal $(1-2i)(-1+3i)$?
2. À quoi est égal i^7 ?
3. Résoudre $z^2-2z+2=0$.
4. Donner une forme trigonométrique de $-1-i$.
5. Donner la forme algébrique de $\dfrac{1}{3+2i}$.
6. Trouver tous les nombres complexes dont le carré vaut i.
7. Quel est l'inverse de i ?
8. Simplifier $(1+2i)^3$.

9\. Est-il vrai que l'inverse d'un nombre complexe de module 1 est égal à son conjugué ?

10\. Vrai ou faux : $\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2,\ \overline{a+ib} = a-ib$?

1. À quoi est égal $(1-2i)(-1+3i)$?

Réponse : On développe :

$$(1-2i)(-1+3i) = -1+3i+2i+6 = 5+5i$$

2. À quoi est égal i^7 ?

Réponse : On sait que $i^2 = -1$ donc $i^3 = -i$ et $i^4 = 1$, on en déduit que :

$$i^7 = i^4 \times i^3 = 1 \times (-i) = -i$$

3. Trouver tous les nombres complexes z tels que :

$$z^2 - 2z + 2 = 0$$

Réponse : Le discriminant de ce trinôme est : $\Delta = -4$. Il y a deux racines complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{2 + 2i}{2} = 1 + i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{2 - 2i}{2} = 1 - i$$

4. Donner une forme trigonométrique de $-1-i$.

Réponse : On commence par calculer le module :

$$|-1-i| = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$$

On factorise ensuite par le module :

$$-1-i = \sqrt{2}\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\Big)$$

Il faut reconnaître un angle θ tel que $\cos(\theta) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin(\theta) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

On trouve que $\theta = -\dfrac{3\pi}{4}$ convient. Ainsi :

$$-1 - i = \sqrt{2}\Big(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\Big) = \sqrt{2}e^{-\frac{3i\pi}{4}}$$

5. Donner la forme algébrique de $\dfrac{1}{3+2i}$.

Réponse : On multiplie le dénominateur par son conjugué :

$$\frac{1}{3+2i} = \frac{3-2i}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{3-2i}{13} = \frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$$

6. Trouver tous les nombres complexes dont le carré vaut i.

Réponse : On trouve deux nombres complexes dont le carré vaut i :

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i \quad \text{et} \quad z_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i$$

Il n'y a pas d'autres complexes dont le carré vaut i. En effet, soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^2 = i$ alors $z^2 = z_1^2$ ce que l'on réécrit :

$$z^2 - z_1^2 = 0 \Leftrightarrow (z - z_1)(z + z_1) = 0$$

Ainsi $z = z_1$ ou $z = -z_1$.

7. Quel est l'inverse de i ?

Réponse : L'inverse de i vaut $-i$, en effet :

$$i \times (-i) = -i^2 = -(-1) = 1$$

8. Simplifier $(1+2i)^3$.

Réponse : On a :

$$(1+2i)^3 = (1+2i)^2(1+2i) = (1+4i-4)(1+2i) = (-3+4i)(1+2i)$$

Ce qui donne après simplifications : $-11-2i$.

9. Est-il vrai que l'inverse d'un nombre complexe de module 1 est égal à son conjugué ?

Réponse : C'est vrai, en effet on a :

$$1 = |z|^2 = z\bar{z} \text{ c'est-à-dire } \bar{z} = \frac{1}{z}$$

10. Vrai ou faux : $\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2,\ \overline{a+ib} = a - ib$?

Réponse : Le piège est que a et b sont supposés complexes et non réels, ainsi ce n'est pas toujours vrai. Par exemple avec $a = 1$ et $b = i$, cela donne :

$$\overline{1 + i \times i} = 0 \neq 2 = 1 - i \times i$$