1-Soit $a \in \mathbb{Z}$, que vaut $\mathrm{pgcd}(a, 0)$?

2-Écrire la division euclidienne de -31 par 4.

3-Dans un célèbre fast-food, les chicken nuggets sont vendus dans des boites de 4 ou de 9. Montrer qu'il est impossible d'en acheter exactement 23. Montrer que pour tout $n \geq 24$, il est possible d'en acheter exactement n.

4-Soient $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, on écrit la division euclidienne de a par b : $a = bq + r$. Démontrer que $\mathrm{pgcd}(a, b) = \mathrm{pgcd}(b, r)$.

5-Quel est le chiffre des unités de $2023^{2022^{2021}}$?

6-Démontrer le critère de divisibilité par 3.

1-Soit $a \in \mathbb{Z}$, que vaut $\text{pgcd}(a, 0)$?

Réponse : L'entier relatif a est un pgcd de a et 0 car :

$i)$ $a|a$ et $a|0$

$ii)$ si $\delta|a$ et $\delta|0$ alors $\delta|a$

Finalement, on a :

$$\text{pgcd}(a, 0) = |a|$$

2-Écrire la division euclidienne de -31 par 4.

Réponse : On a :

$$-31 = -8 \times 4 + 1$$

Le reste vaut 1 qui appartient bien à $[\![0, 3]\!]$.

4-Soient $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, on écrit la division euclidienne de a par b : $a = bq + r$. Démontrer que $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, r)$.

Réponse : Notons $d_{ab} = \text{pgcd}(a, b)$ et $d_{br} = \text{pcgd}(b, r)$. On a :

$$d_{ab}|a \text{ et } d_{ab}|b \text{ donc } d_{ab}|a - bq = r$$

Ainsi : $d_{ab}|b$ et $d_{ab}|r$ d'où $d_{ab}|d_{br}$. De même :

$$d_{br}|b \text{ et } d_{br}|r \text{ donc } d_{br}|bq + r = a$$

Ainsi : $d_{br}|a$ et $d_{br}|b$ d'où $d_{br}|d_{ab}$. Deux entiers positifs qui se divisent l'un l'autre sont égaux :

$$\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, r)$$

5-Quel est le chiffre des unités de $2023^{2022^{2021}}$?

Réponse : Cela revient à calculer $2023^{2022^{2021}}$ [10]. Déjà $2023 = 3$ [10], ainsi :

$$2023^{2022^{2021}} = 3^{2022^{2021}} \ [10]$$

On cherche alors la première puissance de 3 congrue à 1 modulo 10. On trouve $3^4 = 1$ [10].

D'après la méthode vue en cours, il s'agit alors d'effectuer la division euclidienne de 2022^{2021} par 4. Cherchons plus particulièrement le reste, c'est-à-dire la classe de congruence de 2022^{2021} modulo 4. Or :

$$2022^{2021} = 2^{2021} = 2^2 \times 2^{2019} = 0 \ [4]$$

Finalement 2022^{2021} est divisible par 4, par conséquent, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $2022^{2021} = 4q$. Finalement :

$$2023^{2022^{2021}} = 3^{2022^{2021}} = 3^{4q} = (3^4)^q = 1^q = 1 \ [10]$$

Le chiffre des unités recherché est 1.

6-Démontrer le critère de divisibilité par 3.

Réponse : Soit $n \in \mathbb{N}$, notons $(a_i)_{0 \leq i \leq r} \in [\![0, 9]\!]^{r+1}$ les chiffres de l'écriture décimale de n, de sorte que :

$$n = \sum_{i=0}^{r} a_i \times 10^i$$

On remarque que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $10^i \equiv 1\ [3]$ car $10 \equiv 1\ [3]$. Ainsi :

$$3|n \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{r} a_i \times 10^i \equiv 0\ [3] \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{r} a_i \equiv 0\ [3]$$

Un entier est divisible par 3 si et seulement si la somme de ces chiffres est divisible par 3.