

1-On note $f : x \mapsto \sin(x)$ définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Justifier que f est une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dans $[-1, 1]$. Quel est le sens de variation de f^{-1} ? Sur quel ensemble f^{-1} est-elle définie? dérivable?

2-Soit $h : x \mapsto \ln(2x - 4)$ définie sur $]2, +\infty[$. Démontrer que h est une bijection de $]2, +\infty[$ vers un intervalle à préciser. Expliciter h^{-1} .

3-Soit $f : I \rightarrow J$ une bijection strictement croissante. Démontrer que f^{-1} est strictement croissante sur J .

4-Soit $f : I \rightarrow J$ une bijection impaire. Démontrer que f^{-1} est impaire.

5-Soit f et g deux bijections de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Démontrer que $g \circ f$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. À quoi est égal $(g \circ f)^{-1}$?

1-On note $f : x \mapsto \sin(x)$ définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Justifier que f est une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dans $[-1, 1]$. Quel est le sens de variation de f^{-1} ? Sur quel ensemble f^{-1} est-elle définie? dérivable?

Réponse : • La fonction f est continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on a : $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Ainsi f réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ vers $[-1, 1]$.

• La fonction f^{-1} est strictement croissante sur $[-1, 1]$ comme réciproque d'une application strictement croissante.

• La fonction f est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, la fonction $f' = \cos$ s'annule en $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. Ce qui démontre que la fonction f^{-1} est dérivable sur $] -1, 1[$. ($\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$).

2-Soit $h : x \mapsto \ln(2x - 4)$ définie sur $]2, +\infty[$. Démontrer que h est une bijection de $]2, +\infty[$ vers un intervalle à préciser. Expliciter h^{-1} .

Réponse : La fonction h est dérivable sur $]2, +\infty[$ et :

$$\forall x \in]2, +\infty[, h'(x) = \frac{2}{2x - 4} > 0$$

La fonction h est donc strictement croissante sur $]2, +\infty[$, elle est continue sur cet intervalle. De plus $\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$. D'après le théorème de la bijection, h réalise une bijection de $]2, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

On cherche h^{-1} avec la méthode vue en cours. Soit $x \in]2, +\infty[$ et $y \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}y = h(x) &\Leftrightarrow y = \ln(2x - 4) \\&\Leftrightarrow e^y = 2x - 4 \\&\Leftrightarrow \frac{1}{2}(e^y + 4) = x\end{aligned}$$

On en déduit que $h^{-1} : y \mapsto \frac{1}{2}(e^y + 4)$, définie sur $\mathbb{R}$.

3-Soit $f : I \rightarrow J$ une bijection impaire. Démontrer que f^{-1} est impaire.

Réponse : • Soit $y \in J$, il existe $x \in I$ tel que $y = f(x)$. On a :

$$-y = -f(x) = f(-x)$$

Ce qui démontre que $-y \in J$ et on sait que J est symétrique par rapport à 0.

• Avec les mêmes notations, on a :

$$f^{-1}(-y) = f^{-1}(-f(x)) = f^{-1}(f(-x)) = -x = -f^{-1}(y)$$

La fonction f^{-1} est impaire.

4-Soit $f : I \rightarrow J$ une bijection strictement croissante. Démontrer que f^{-1} est strictement croissante sur J .

Réponse : Soit $(y, y') \in J^2$ avec $y < y'$. Supposons par l'absurde que $f^{-1}(y) \geq f^{-1}(y')$, par croissance de f , on obtient :

$$f(f^{-1}(y)) \geq f(f^{-1}(y')) \text{ c'est-à-dire } y \geq y'$$

C'est absurde, on en déduit que : $f^{-1}(y) < f^{-1}(y')$, ce qui démontre la stricte croissance de f^{-1} .

5-Soit f et g deux bijections de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Démontrer que $g \circ f$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. À quoi est égal $(g \circ f)^{-1}$?

Réponse : Soit $z \in \mathbb{R}$, comme g est bijective il existe un unique $y \in \mathbb{R}$ tel que $z = g(y)$. Comme f est bijective, il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(x)$. Finalement, on a démontré que pour tout $z \in \mathbb{R}$, il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que :

$$z = g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x)$$

$g \circ f$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Soient $(x, z) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$z = g \circ f(x) \Leftrightarrow g^{-1}(z) = f(x) \Leftrightarrow f^{-1} \circ g^{-1}(z) = x$$

On en déduit que la bijection réciproque de $g \circ f$ est $f^{-1} \circ g^{-1}$. D'où la formule :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$