

**24** ♡★ Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = \ln(\sqrt{1+x^2} + x)$$

- Déterminer le domaine de définition de  $f$ , noté  $\mathcal{D}$ .
- Démontrer que  $f$  est impaire.
- Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.
- Étudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variations.
- En déduire que  $f$  est une bijection de  $\mathcal{D}$  sur un ensemble à déterminer.
- Donner le sens de variation de  $f^{-1}$ , ainsi que son domaine de dérivabilité.
- Déterminer l'expression de  $f^{-1}$ .

### Corrigé :

a) Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on a :

$$-x \leq |x| = \sqrt{x^2} < \sqrt{x^2 + 1}$$

On en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 0 < x + \sqrt{x^2 + 1}$$

La fonction  $\ln$  étant définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ , on en déduit que :

$$\mathcal{D} = \mathbb{R}$$

b) Soit  $x \in \mathbb{R}$ , on a :

$$f(x) + f(-x) = \ln(\sqrt{1+x^2} + x) + \ln(\sqrt{1+x^2} - x) = \ln((\sqrt{1+x^2} + x)(\sqrt{1+x^2} - x)) = \ln(x^2 + 1 - x^2) = 0$$

Ce qui permet d'affirmer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)$$

$$f \text{ est impaire}$$

c) On a immédiatement :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . Pour déterminer la limite en  $-\infty$ , le plus simple est d'utiliser l'impairité :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -f(-x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

d) La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme composée de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} + 1}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{(\sqrt{x^2+1})(x + \sqrt{x^2+1})} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} > 0$$

On en déduit que :

$$f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}$$

e) La fonction  $f$  est strictement croissante et continue sur  $\mathbb{R}$ , de plus  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . On en déduit que :

$$f \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}$$

f) La fonction  $f^{-1}$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  en tant que bijection réciproque d'une fonction strictement croissante.

La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et sa dérivée ne s'annule pas comme nous l'avons vu dans la question d), on en déduit que  $f^{-1}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

$$f^{-1} \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}$$

g) Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on suppose que  $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$  et on cherche à exprimer  $x$  en fonction de  $y$ . On peut résoudre l'équation par équivalences de façon classique mais ici le plus rapide est d'utiliser l'impairité car on a aussi :  $-y = \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1})$ . En prenant l'exponentielle, cela donne :

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1} \text{ et } e^{-y} = -x + \sqrt{x^2 + 1}$$

En retranchant les inégalités, on en déduit immédiatement que :

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

|                                                                      |
|----------------------------------------------------------------------|
| $f^{-1} : y \mapsto \frac{e^y - e^{-y}}{2}$ définie sur $\mathbb{R}$ |
|----------------------------------------------------------------------|