Polynômes

Généralités

1 ♡ On considère la suite de polynômes définie par récurrence par :

$$\begin{cases} P_0 = 1 \\ \forall k \in \mathbb{N},\ P_{k+1} = (X^2+1)P_k' - (2k+1)XP_k \end{cases}$$

Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_k.

2 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, déterminer le degré du polynôme $P(X+1) - P(X)$.

3 ★ Résoudre l'équation d'inconnue $P \in \mathbb{K}[X]$:

$$(X^2+1)P'' - 6P = 0$$

4 ♡★ Résoudre les équations suivantes :

a) $Q^2 = XP^2$

b) $P \circ P = P$

c) $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$

5 ♡★ Soit $(a,b) \in \mathbb{K}^2$ tel que $a \neq b$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.

a) Exprimer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$ en fonction de $P(a)$ et $P(b)$.

b) Exprimer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)^2$ en fonction de $P(a)$ et $P'(a)$.

6 ♡★★ Soit $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$ de $(\cos(t)X + \sin(t))^n$ par X^2+1.

Arithmétique des polynômes

7 ♡ Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^8 + X^4 + 1$.

8 ♡ Factoriser les polynômes suivants dans $\mathbb{R}[X]$:

a) $P = 3X^3 + 3$

b) $P = X^4 - 5X^2 + 4$

c) $P = X^4 + 5X^2 + 6$

d) $P = X^4 + X^2 + 1$

e) $P = X^4 + 1$

9 ★ Factoriser $P = X^6 + 27$ dans $\mathbb{R}[X]$ puis $\mathbb{C}[X]$.

10 ♡★ Factoriser $X^{2n} + X^n + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ où $n \geq 1$.

11 ★ Soit $(A,B) \in \mathbb{K}[X]^2$ tels que $A^2 | B^2$. Montrer que $A | B$.

12 ★★ Décomposer dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme :

$$P = X^{2n} - (2\cos\alpha)X^n + 1$$

pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

13 ★★ Soient $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$, déterminer le pgcd de $A = X^a - 1$ et $B = X^b - 1$.

14 ♡★★ Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, montrer que $P(X) - X$ divise $P \circ P(X) - X$.

Racines

15 ♡ Justifier que :

$$\forall (n,p,q) \in \mathbb{N}^3,\ 1 + X + X^2 | X^{3n} + X^{3p+1} + X^{3q+2}$$

16 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que :

$$Z_n = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$$

est divisible par $(X-1)^3$.

17 Montrer que 2 est racine triple de :

$$P = X^4 - 9X^3 + 30X^2 - 44X + 24$$

En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$.

18 Que dire d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ dont la fonction polynomiale associée est périodique ?

19 Soient x_1, x_2, x_3 les trois racines complexes comptées avec multiplicité de :

$$P = 2X^3 - 3X^2 + 6X - 7$$

Que vaut $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$? En déduire que P possède une racine dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

20 ♡ Le but de l'exercice est de factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme :

$$A = X^7 - X^6 + X^5 - X^4 + X^3 - X^2 + X - 1$$

a) Donner les racines de $X^3 + X^2 + X + 1$.

b) À l'aide d'une racine évidente de A, factoriser A dans $\mathbb{C}[X]$.

c) En déduire la factorisation de A dans $\mathbb{R}[X]$.

21 Trouver toutes les racines complexes de :

$$P = X^4 + 2X^3 - 4X^2 - 2X + 3$$

22 ♡ Montrer que si $n \geq 2$, $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ n'a pas de racine multiple.

23 ★ Le but de l'exercice est de trouver la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

a) Déterminer les racines carrées de :

$$\frac{\sqrt{3}+i}{2} \text{ et } \frac{-\sqrt{3}+i}{2}$$

b) Effectuer la division euclidienne de $X^6 - i$ par $X^2 + i$.

c) Factoriser $X^6 - i$ dans $\mathbb{C}[X]$.

d) En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

24 ♡★ On note x_1, x_2, x_3 les racines complexes comptées avec multiplicité de :

$$P = X^3 + X - 1$$

Calculer $\sum_{i=1}^{3} x_i^4$.

25 ★ Soit $P = X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1$.

a) Trouver une racine évidente de P.

b) En posant $Y = X + \frac{1}{X}$, trouver toutes les racines de P.

26 ★ Déterminer les triplets $(x, y, z) \in (\mathbb{C}^*)^3$ tels que :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \\ xyz = -4 \end{cases}$$

27 ♡★ Trouver toutes les racines de :

$$P = (X + i)^6 + (X^2 + 2iX - 1)^6$$

avec leur multiplicité.

28 ♡★ Soit $a \in \mathbb{N}$ et P_a la fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par : $P_a(t) = t^3 - (a^2 + 2a)t + 2$. Le but de l'exercice est de trouver a tel que P_a possède 3 racines dans $\mathbb{Z}$. On suppose qu'un tel a existe et on note $t_1 \leq t_2 \leq t_3$ les trois racines entières de P_a.

a) Montrer en utilisant les relations coefficients-racines que $t_1 < 0$.

b) Montrer $t_1 < 0 < t_2 \leq t_3 < -t_1$.

c) En déduire les valeurs de t_1, t_2 et t_3.

d) Montrer que $P'(t_2) = 0$. En déduire la valeur de a.

e) Conclure.

29 ★★ Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = \bar{z}$$

30 ★★ Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non nul tel que :

$$P(X^2) + P(X)P(X+1) = 0$$

a) Montrer que si a est racine de P alors a^2 l'est aussi.

b) En déduire qu'une racine a de P vérifie $a = 0$ ou a racine de l'unité.

31 ★★ Soit $(p, q) \in (\mathbb{N}^* \setminus \{1\})^2$ avec $p \wedge q = 1$.

a) Montrer que 1 est la seule racine commune de :

$$X^p - 1 \text{ et } X^q - 1$$

b) En déduire que :

$$(X^p - 1)(X^q - 1) | (X - 1)(X^{pq} - 1)$$

32 ♡★★ Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ avec $\deg(P) \geq 2$. Montrer que l'application polynomiale associée à P n'est pas injective.

33 ♡★★ Factoriser $P = X^5 - 4X^4 + 9X^3 - 21X^2 + 20X - 5$ dans $\mathbb{R}[X]$ sachant qu'il a 2 racines dont le produit vaut 5. On pourra remarquer au préalable que 1 est racine de P.

34 ★★★ On dit qu'un nombre est algébrique s'il est racine d'un polynôme non nul à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

a) Montrer que les nombres rationnels sont algébriques.

b) Donner un nombre irrationnel et algébrique.

c) Montrer que $\sqrt{3} + \sqrt{7}$ est algébrique.

d) Montrer que $a = \cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$ est algébrique, en déduire que a est irrationnel.

On peut montrer que π et e ne sont pas algébriques, on dit qu'ils sont transcendants.

Défis

D1 ★★ Déterminer tous les polynômes divisibles par leur polynôme dérivé.

D2 ★★★ Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ avec $\mathrm{Card}\{|a|, |b|, |c|\} = 3$ tels que :

$$\forall p \in [\![1, 3]\!],\ a^p + b^p + c^p \in \mathbb{R}$$

Montrer que $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

D3 ★★★★ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geq 0 \Leftrightarrow \exists (A, B) \in \mathbb{R}[X]^2,\ P = A^2 + B^2$$