Exercice 1

On définit la fonction polynomiale $P : z \mapsto \dfrac{1}{2i}\Big((z+i)^5 - (z-i)^5\Big)$.

1. (a) Démontrer que résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$ revient à résoudre l'équation $\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^5 = 1$.
   (b) En déduire toutes les solutions de l'équation $P(z) = 0$. On les simplifiera avec la technique de l'angle moitié.
2. (a) En développant, démontrer que $P : z \mapsto 5z^4 - 10z^2 + 1$.
   (b) Trouver les racines de P par une autre méthode que celle de la question 1.
3. On définit la fonction cotan : $x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.
   (a) Démontrer que $\mathrm{cotan}\left(\dfrac{\pi}{5}\right) > 1$.
   (b) Déduire des questions précédentes la valeur exacte de $\mathrm{cotan}\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$.

Exercice 2

Soit $u = e^{\frac{2i\pi}{11}}$. On pose :

$$S = u + u^3 + u^4 + u^5 + u^9 \text{ et } T = u^2 + u^6 + u^7 + u^8 + u^{10}$$

1. Justifier que $u^{11} = 1$ et $\overline{u} = \dfrac{1}{u}$.
2. En déduire que S et T sont conjugués.
3. Démontrer que $S + T = -1$ et $S \times T = 3$.
4. En déduire les valeurs de S et T.
5. On rappelle que par définition : $\tan\left(\dfrac{3\pi}{11}\right) = \dfrac{\sin\left(\frac{3\pi}{11}\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{11}\right)}$.
   (a) Démontrer que :
   $$i\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) = \frac{u^3 - 1}{u^3 + 1} = -\sum_{k=1}^{10}(-u^3)^k$$
   (b) Démontrer que : $4i\sin\left(\dfrac{2\pi}{11}\right) = 2(u - u^{10})$.
   (c) En déduire que : $\tan\left(\dfrac{3\pi}{11}\right) + 4\sin\left(\dfrac{2\pi}{11}\right) = i(T - S) = \sqrt{11}$.