L'usage de la calculatrice est interdit. Les raisonnements présentés devront être soigneusement justifiés et détaillés, quelques points seront dédiés à la présentation, l'orthographe et la propreté de votre copie. En particulier, il vous est demandé de souligner les résultats obtenus. Il n'est pas nécessaire de répondre à l'ensemble des questions pour avoir une bonne note.

Échauffement

1. (a) Soit $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Par définition de l'exponentielle complexe, on a :

$$\boxed{e^z = e^x e^{iy}}$$

(b) Soit $Z \in \mathbb{C}^*$, trouvons-lui un antécédent par f. Le nombre complexe Z étant non nul, il est possible de l'écrire $Z = re^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On cherche alors $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$f(z) = e^z = e^x e^{iy} = re^{i\theta}$$

On voit qu'il est possible de choisir $x = \ln(r)$ et $y = \theta$. On peut faire la vérification :

$$f(\ln(r) + i\theta) = e^{\ln(r)+i\theta} = e^{\ln(r)}e^{i\theta} = re^{i\theta} = Z$$

$$\boxed{f \text{ est surjective}}$$

(c) L'application f n'est pas injective, en effet : $f(0) = f(2i\pi) = 1$.

$$\boxed{f \text{ n'est pas injective}}$$

2. C'est une équivalence à démontrer, nous allons procéder par double implication :

($\Longrightarrow$) On suppose que $(A \cap C) \subset (B \cap C)$ et $(A \setminus C) \subset (B \setminus C)$, démontrons que $A \subset B$:

Soit $\underline{x \in A}$, il y a deux cas :

- soit $x \in C$, alors $x \in A \cap C$. Or, par hypothèse $A \cap C = B \cap C$ donc $x \in B \cap C$. D'où $\underline{x \in B}$.
- soit $x \notin C$ alors $x \in \complement_E C$. Ce qui nous donne que $x \in A \cap \complement_E C = A \setminus C$. Or, par hypothèse $A \setminus C \subset B \setminus C$. Ce qui donne $x \in B \setminus \complement_E C$, en particulier $\underline{x \in B}$.

Dans les deux cas $x \in B$, ce qui démontre que $A \subset B$.

($\Longleftarrow$) Réciproquement, supposons que $A \subset B$ et démontrons que $(A \cap C) \subset (B \cap C)$ et $(A \setminus C) \subset (B \setminus C)$.

- Il est clair que $(A \cap C) \subset (B \cap C)$ puisque $A \subset B$.
- De même, on a bien $(A \cap \complement_E C) \subset (B \cap \complement_E C)$ puisque $A \subset B$. C'est-à-dire $(A \setminus C) \subset (B \setminus C)$.

$$\boxed{\begin{cases} (A \cap C) \subset (B \cap C) \\ (A \setminus C) \subset (B \setminus C) \end{cases} \Longleftrightarrow A \subset B}$$

3. On suppose que $A \cap B = C \cap D$, démontrons que : $(A \cup (B \cap C)) \cap (A \cup (B \cap D)) = A$. On ne va pas procéder par double inclusion mais directement par égalité :

$$\begin{array}{rcll} (A \cup (B \cap C)) \cap (A \cup (B \cap D)) & = & A \cup ((B \cap C) \cap (B \cap D)) & \text{en utilisant la distributivité} \\ & = & A \cup (B \cap C \cap D) & \text{car } B \cap C \cap B \cap D = B \cap C \cap D \\ & = & A \cup (B \cap A \cap B) & \text{car } C \cap D = A \cap B \\ & = & A \cup (B \cap A) & \\ & = & A & \text{car } (B \cap A) \subset A \end{array}$$

Dans tout ce calcul, on a utilisé l'associativité de l'intersection.

$$\boxed{A \cap B = C \cap D \Longrightarrow (A \cup (B \cap C)) \cap (A \cup (B \cap D)) = A}$$

4. (a) C'est faux, l'application $\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x^2 \end{array}$ n'est ni surjective ni injective.

   (b) C'est vrai, d'après le cours tout nombre complexe possède une racine carrée. Plus précisément un nombre complexe non nul possède exactement deux racines carrées et 0 possède une racine carrée, lui-même.

   (c) C'est vrai. Soit E et F deux ensembles et $A \subset E$, on considère une application injective f de E dans F. C'est-à-dire que tout élément de F admet au plus un antécédent dans E et donc au plus un antécédent dans A puisque $A \subset E$. Ainsi $f_{|A}$ est injective.

   (d) C'est faux, il est possible que $g \circ f$ soit bijective. Par exemple :

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & & n & \mapsto & 2n \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} g & : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & & n & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si} \quad n \text{ est pair} \\ \dfrac{n-1}{2} & \text{si} \quad n \text{ est impair} \end{cases} \end{array}$$

   Il est clair que f n'est pas surjective et que g n'est pas injective car $g(0) = g(1)$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N},\ g \circ f(n) = g(2n) = n$, ainsi $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ est bien une bijection.

5. On suppose que $f \circ g \circ f$ est bijective. Nous allons démontrer dans un premier temps que f est bijective.

   • Montrons que f est injective. Soient $(x, x') \in E^2$ tels que $\underline{f(x) = f(x')}$, on compose par $f \circ g$ pour obtenir $f(g(f(x))) = f(g(f(x')))$. Or $f \circ g \circ f$ est bijective donc en particulier injective, on en déduit que $\underline{x = x'}$. D'où l'injectivité de f.

   • Montrons que f est surjective. Soit $y \in E$, cherchons-lui un antécédent. L'application $f \circ g \circ f$ est bijective donc en particulier surjective, ainsi il existe $x \in E$ tel que $f(g(f(x))) = y$. On voit que $g(f(x))$ est bien un antécédent de y par f. D'où la surjectivité de f.

   Finalement, f est bijective et en particulier f^{-1} existe. Il reste à écrire que :

$$g = f^{-1} \circ (f \circ g \circ f) \circ f^{-1}$$

   Les trois applications mises en jeu dans le membre de droite sont bijectives ainsi g est bijective comme composée de bijections.

$$\boxed{f \circ g \circ f \text{ bijective implique } g \text{ bijective}}$$

Exercice 1

1. L'équation caractéristique s'écrit $X^2 + b = 0$, il y a trois cas :
   ► Si $b > 0$, l'équation caractéristique possède deux solutions complexes conjuguées : $X_1 = i\sqrt{b}$ et $X_2 = -i\sqrt{b}$, dans ce cas l'ensemble des solutions est :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{cccl} y & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & A\cos(\sqrt{b}x) + B\sin(\sqrt{b}x) \end{array} ,\ (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$$

   ► Si $b = 0$, l'équation devient $y'' = 0$ ainsi l'ensemble des solutions est :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{ccccc} y & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & Ax + B \end{array} ,\ (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$$

   ► Si $b < 0$, l'équation caractéristique possède deux racines réelles : $X_1 = \sqrt{-b}$ et $X_2 = -\sqrt{-b}$ dans ce cas l'ensemble des solutions est :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{ccccc} y & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & Ae^{\sqrt{-b}x} + Be^{-\sqrt{-b}x} \end{array} ,\ (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$$

2. On reprend les solutions trouvées dans les questions précédentes en cherchant les réels A et B tels que $y(0) = y(1) = 0$.
   ► Si $b > 0$, une solution de l'équation $y'' + by = 0$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $y : x \mapsto A\cos(\sqrt{b}x) + B\sin(\sqrt{b}x)$ où $(A,B) \in \mathbb{R}^2$.

$$\left\{ \begin{array}{ccc} y(0) & = & 0 \\ y(1) & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} A & = & 0 \\ A\cos(\sqrt{b}) + B\sin(\sqrt{b}) & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} A & = & 0 \\ B\sin(\sqrt{b}) & = & 0 \end{array} \right.$$

   Dans cette question, on cherche des solutions non nulles à cette équation. Comme on a nécessairement $A = 0$, il faut que B soit non nul afin d'avoir une solution non nulle à cette équation et dans ce cas $\sin(\sqrt{b}) = 0$, on a :

$$\sin(\sqrt{b}) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ \sqrt{b} = k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ b = k^2\pi^2$$

   Dans ce cas, on a une solution non nulle définie sur $\mathbb{R}$ par $y : x \mapsto B\sin(k\pi x)$ où $k \in \mathbb{Z}^*$ et $B \in \mathbb{R}^*$.
   ► Si $b = 0$ une solution de l'équation $y'' + by = 0$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $y : x \mapsto Ax + B$ où $(A,B) \in \mathbb{R}^2$.

$$\left\{ \begin{array}{ccc} y(0) & = & 0 \\ y(1) & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} B & = & 0 \\ A + B & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} A & = & 0 \\ B & = & 0 \end{array} \right.$$

   Dans ce cas seule la fonction nulle vérifie ces conditions.
   ► Si $b < 0$ une solution de l'équation $y'' + by = 0$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $y : x \mapsto Ae^{\sqrt{-b}x} + Be^{-\sqrt{-b}x}$ où $(A,B) \in \mathbb{R}^2$.

$$\left\{ \begin{array}{ccc} y(0) & = & 0 \\ y(1) & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} A + B & = & 0 \\ Ae^{\sqrt{-b}} + Be^{-\sqrt{-b}} & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} B & = & -A \\ Ae^{\sqrt{-b}} - Ae^{-\sqrt{-b}} & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} B & = & -A \\ 2A\mathrm{sh}(\sqrt{-b}) & = & 0 \end{array} \right.$$

   La fonction sh s'annule uniquement en 0, or dans ce cas $b \neq 0$ ainsi $2A\mathrm{sh}(\sqrt{-b}) = 0$ implique que $A = 0$ et par suite $B = 0$. Toutes les solutions trouvées sont nulles.

En résumé l'ensemble des réels b tels qu'il existe une solution non nulle à l'équation proposée est :

$$\boxed{\{k^2\pi^2,\ k \in \mathbb{Z}^*\}}$$

Ces solutions non nulles sont alors les fonctions :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{cccc} y & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & B\sin(k\pi x) \end{array},\ (k,B) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{R}^* \right\}}$$

3. Remarquons tout d'abord que la fonction z est dérivable deux fois sur I puisque c'est la somme de y'' qui est dérivable deux fois sur I car y est dérivable quatre fois sur I et de uy qui est dérivable deux fois sur I.
De plus $z'' = (y'')'' + uy'' = y^{(4)} + uy''$. Sur l'intervalle I, on a :

z solution de $z''+vz = 0 \Leftrightarrow y$ solution de $y^{(4)}+uy''+v(y''+uy) = 0 \Leftrightarrow y$ solution de $y^{(4)}+(u+v)y''+uvy = 0$ ($\bigstar$)

Nous devons trouver une condition nécessaire et suffisante sur $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ telle que y soit solution sur I de $y^{(4)} + 2ay'' + y = 0$. Cette équation différentielle a les mêmes solutions que l'équation différentielle ($\bigstar$) si et seulement si les coefficients sont égaux, c'est-à-dire si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} u+v & = & 2a \\ uv & = & 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow u \text{ et } v \text{ solutions de } X^2 - 2aX + 1 = 0$$

Le discriminant de cette équation est $\Delta = 4(a^2-1)$ qui est strictement positif puisque $a > 1$. Les deux solutions sont $X_1 = a + \sqrt{a^2-1}$ et $X_2 = a - \sqrt{a^2-1}$. Les valeurs de u et v recherchées pour que l'équivalence soit vérifiée sont :

$$\boxed{\{u,v\} = \{a+\sqrt{a^2-1}, a-\sqrt{a^2-1}\}}$$

Il n'y a pas de moyen de différencier u et v.

4. (a) On utilise les formules trouvées à la question précédente :

$$\begin{aligned} a \pm \sqrt{a^2-1} = k^2\pi^2 \text{ où } k \in \mathbb{Z}^* \quad & \Leftrightarrow \quad a - k^2\pi^2 = \pm\sqrt{a^2-1} \text{ où } k \in \mathbb{Z}^* \\ & \Leftrightarrow \quad a^2 - 2ak^2\pi^2 + k^4\pi^4 = a^2 - 1 \text{ où } k \in \mathbb{Z}^* \\ & \Leftrightarrow \quad 2ak^2\pi^2 = 1 + k^4\pi^4 \text{ où } k \in \mathbb{Z}^* \\ & \Leftrightarrow \quad a = \frac{1+k^4\pi^4}{2k^2\pi^2} \text{ où } k \in \mathbb{Z}^* \end{aligned}$$

$$\boxed{u = k^2\pi^2 \text{ ou } v = k^2\pi^2 \text{ avec } k \in \mathbb{Z}^* \text{ si et seulement si } a = \frac{1+k^4\pi^4}{2k^2\pi^2}}$$

(b) On suppose que pour tout $k \in \mathbb{Z}^*,\ a \neq \dfrac{1+k^4\pi^4}{2k^2\pi^2}$, alors d'après la question précédente, u et v ne sont pas égaux à $k^2\pi^2$ avec $k \in \mathbb{Z}^*$. On suppose que y est une solution de l'équation (E) et on note toujours z la fonction définie sur I par $z = y'' + uy$. On a $z(0) = y''(0) + uy(0) = 0$ et $z(1) = y''(1) + uy(1) = 0$. Ainsi la fonction z est solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} z'' + vz = 0 \\ z(0) = z(1) = 0 \end{array} \right.$$

Comme $v \neq k^2\pi^2$ pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$, d'après la question 2. cela implique que z est la fonction nulle. Or $z = y'' + uy$ donc y vérifie l'équation :

$$\begin{cases} y'' + uy = 0 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

Or $u \neq k^2\pi^2$ pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$, toujours d'après la question 2., cela implique que y est la fonction nulle.

$$\boxed{\text{Si pour tout } k \in \mathbb{Z}^*,\ a \neq \frac{1+k^4\pi^4}{2k^2\pi^2} \text{ alors la seule solution de } (E) \text{ est la fonction nulle.}}$$

(c) D'après la question 4.(a), on sait que $u = k^2\pi^2$ ou $v = k^2\pi^2$, considérons ces deux cas :
▶ Si $v = k^2\pi^2$ alors z est solution de :

$$\begin{cases} z'' + vz = 0 \\ z(0) = z(1) = 0 \end{cases}$$

D'après l'étude faite à la question 2., cela signifie que la fonction z est définie sur I par $z : x \mapsto B\sin(k\pi x)$ où $B \in \mathbb{R}$. Il s'agit à présent de trouver les fonctions y qui vérifient :

$$\begin{cases} y'' + uy = z \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y'' + uy = B\sin(k\pi x) \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y'' + \dfrac{1}{k^2\pi^2}y = B\sin(k\pi x) \quad (\bigstar\bigstar) \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

Ceci puisque d'après la question 3., on a $uv = 1$ ainsi $u = \dfrac{1}{k^2\pi^2}$.
Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions définies sur I par $y : x \mapsto \alpha\cos\left(\dfrac{x}{k\pi}\right) + \beta\sin\left(\dfrac{x}{k\pi}\right)$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Il reste à trouver une solution particulière de l'équation $(\bigstar\bigstar)$, on la cherche sous la forme $y_0 : x \mapsto \mu\sin(k\pi x)$ où $\mu \in \mathbb{R}$. La fonction y_0 est dérivable deux fois sur I et $y_0'' : x \mapsto -\mu k^2\pi^2\sin(k\pi x)$. Pour tout $x \in I$, on a :

$$\begin{aligned} y_0''(x) + uy_0(x) = B\sin(k\pi x) \quad &\Leftrightarrow \quad -\mu k^2\pi^2\sin(k\pi x) + \frac{1}{k^2\pi^2}\mu\sin(k\pi x) = B\sin(k\pi x) \\ &\Leftrightarrow \quad \Big(-\mu k^2\pi^2 + \mu\frac{1}{k^2\pi^2}\Big)\sin(k\pi x) = B\sin(k\pi x) \end{aligned}$$

Or, il existe $x \in [0,1]$ tel que $\sin(k\pi x) \neq 0$, ainsi :

$$\begin{aligned} -\mu k^2\pi^2 + \mu\frac{1}{k^2\pi^2} = B \quad &\Leftrightarrow \quad \mu\Big(\frac{1}{k^2\pi^2} - k^2\pi^2\Big) = B \\ &\Leftrightarrow \quad \mu = \frac{B}{\frac{1}{k^2\pi^2} - k^2\pi^2} \quad (\Delta) \end{aligned}$$

On a bien $\dfrac{1}{k^2\pi^2} - k^2\pi^2 = \dfrac{1-k^4\pi^4}{k^2\pi^2} \neq 0$ puisque π ne peut être égal à $\dfrac{1}{k^4}$ avec $k \in \mathbb{Z}^*$.
Il reste à interpréter ce que l'on vient d'obtenir, B est un réel arbitraire, ainsi quand B décrit $\mathbb{R}$ la relation (Δ) démontre que μ décrit $\mathbb{R}$.
On fait la somme d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène, les solutions sur I de $(\bigstar\bigstar)$ sont les fonctions : $y : x \mapsto \alpha\cos\left(\dfrac{x}{k\pi}\right) + \beta\sin\left(\dfrac{x}{k\pi}\right) + \mu\sin(k\pi x)$.
Un calcul rapide montre que les conditions $y(0) = y(1) = 0$ imposent $\alpha = \beta = 0$.
En résumé s'il existe $k \in \mathbb{Z}^*$ tel que $a = \dfrac{1+k^4\pi^4}{2k^2\pi^2}$, les solutions de l'équation (E) sont :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{cccc} y & : & I & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \mu\sin(k\pi x) \end{array},\ \mu \in \mathbb{R} \right\}}$$

► Si $v = \dfrac{1}{k^2\pi^2}$ alors z est solution de :

$$\left\{\begin{array}{l} z'' + vz = 0 \\ z(0) = z(1) = 0 \end{array}\right.$$

D'après la question 2., z est nécessairement la fonction nulle puisque $v = \dfrac{1}{k^2\pi^2}$ ne peut s'écrire sous la forme $k'^2\pi^2$ où $k' \in \mathbb{Z}$. En effet si tel était le cas, on aurait $\pi^4 = \dfrac{1}{k^2 k'^2}$, ce qui est absurde car π^4 n'est pas rationnel.
Comme z est la fonction nulle, y est solution de :

$$\left\{\begin{array}{l} y'' + uy = 0 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{array}\right.$$

avec $u = k^2\pi^2$ puisque $v = \dfrac{1}{k^2\pi^2}$ et $uv = 1$. Toujours d'après la question 2., cela implique que y est la fonction définie sur I par $y : x \mapsto B\sin(k\pi x)$ où $B \in \mathbb{R}$.
On trouve le même résultat que dans le cas précédent puisque les fonctions solutions de (E) sont :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{lllll} y & : & I & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & B\sin(k\pi x) \end{array}, \ B \in \mathbb{R} \right\}}$$

Exercice 2

Le but de cet exercice est principalement de vous exercer aux calculs sur les nombres complexes.

1. Il s'agit de vérifier, dans les trois cas, la condition de l'énoncé : $ad - bc \neq 0$.
   - La fonction f peut se réécrire $f : z \mapsto \dfrac{-iz-2}{z+4i}$. Ses coefficients sont $a = -i$, $b = -2$, $c = 1$ et $d = 4i$, on a : $-i \times 4i - (-2) \times 1 = 6 \neq 0$.
   - Dans le cas de g, les coefficients sont $a = 1$, $b = -i$, $c = 1$ et $d = i$, ainsi $ad - bc = i - (-i) = 2i \neq 0$.
   - Pour h, on a $a = i$, $b = i$, $c = -1$ et $d = 1$ donc $ad - bc = i - (-i) = 2i \neq 0$.

$$\boxed{f,\ g \text{ et } h \text{ sont des homographies}}$$

2. Soit $z \in U \setminus \{1\}$, nous allons démontrer que $\overline{h(z)} = h(z)$, ce qui démontrera bien que $h(z) \in \mathbb{R}$ d'après la caractérisation d'un réel à l'aide du conjugué. La principale propriété que l'on va utiliser dans le calcul à venir est que pour tout $z \in U \setminus \{1\}$, $\dfrac{1}{z} = \overline{z}$ puisque $z\overline{z} = |z|^2 = 1$. Pour tout $z \in U \setminus \{1\}$:

$$\overline{h(z)} = \overline{\left(i\frac{1+z}{1-z}\right)} = \overline{i}\frac{\overline{1+z}}{\overline{1-z}} = -i\frac{1+\overline{z}}{1-\overline{z}} = \underbrace{-i\frac{1+\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}} = -i\frac{z+1}{z-1}}_{\text{on a multiplié par } \frac{z}{z}} = i\frac{z+1}{1-z} = h(z)$$

$$\boxed{\forall z \in U \setminus \{1\},\ h(z) \in \mathbb{R}}$$

3. Donnons nous pour cette question $z \in D$, il s'agit de démontrer que $h(z) \in P$, c'est-à-dire que $\mathcal{I}m(h(z)) > 0$. Pour cela, une méthode consiste à utiliser la forme algébrique de z, posons $z = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Remarquons également que $z \neq 1$ puisque $|z| < 1$, ainsi le calcul de $h(z)$ a un sens. En multipliant le dénominateur par la quantité conjuguée, on a :

$$h(z) = i\frac{1+x+iy}{1-x-iy} = i\frac{(1+x+iy)(1-x+iy)}{(1-x)^2+y^2} = i\frac{1-x^2-y^2+2iy}{(1-x)^2+y^2} = \frac{1}{(1-x)^2+y^2}\Big(-2y + i(1-x^2-y^2)\Big)$$

Or par hypothèse $z \in D$, donc $|z| < 1$, ce qui implique que $|z|^2 = x^2 + y^2 < 1$ ou encore $0 < 1 - x^2 - y^2$. Ceci permet de conclure puisque :

$$\mathcal{I}m(h(z)) = \frac{1-x^2-y^2}{(1-x)^2+y^2} > 0$$

$$\boxed{\forall z \in D,\ h(z) \in P}$$

4. Soit z un nombre complexe différent de 1 :

$$\begin{array}{rcl} h(z) = z & \Leftrightarrow & i\dfrac{1+z}{1-z} = z \\ \text{''} & \Leftrightarrow & i + iz = z - z^2 \text{ , cette équivalence est correcte car 1 n'est pas solution} \\ \text{''} & \Leftrightarrow & z^2 + (i-1)z + i = 0 \end{array}$$

On reconnaît une équation du second degré à coefficients complexes. Le discriminant de l'équation est $\Delta = (i-1)^2 - 4i = -6i$, on applique la méthode vue en cours pour trouver les racines. On recherche un nombre complexe δ tel que $\delta^2 = \Delta$ avec $\delta = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on obtient de façon usuelle le système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 & = & 0 \\ 2xy & = & -6 \\ x^2 + y^2 & = & 6 \end{cases}$$

Les équations 1 et 3 permettent de trouver $x^2 = 3$ et $y^2 = 3$ et l'équation 2 permet de dire que x et y sont de signes opposés. Ainsi, on peut choisir $\delta = \sqrt{3} - i\sqrt{3}$ et les deux solutions de l'équation du second de degré sont

$$z_1 = \frac{1+\sqrt{3}-i(1+\sqrt{3})}{2} \text{ et } z_2 = \frac{1-\sqrt{3}+i(-1+\sqrt{3})}{2}$$

$$\boxed{\text{Les solutions de l'équation } h(z) = z \text{ sont } \frac{1+\sqrt{3}-i(1+\sqrt{3})}{2} \text{ et } \frac{1-\sqrt{3}+i(-1+\sqrt{3})}{2}}$$

5. Donnons-nous $Z \in \mathbb{C}$ et tentons de résoudre l'équation $h(z) = Z$. Pour $z \neq 1$:

$$h(z) = Z \Leftrightarrow i\frac{1+z}{1-z} = Z \Leftrightarrow i + iz = Z - zZ \Leftrightarrow z(i+Z) = Z - i$$

Remarquons à ce stade que si $Z = -i$ l'équation devient $0 = -2i$ ce qui est contradictoire. Dans la suite, on suppose donc $Z \neq -i$ et on achève la résolution de l'équation en obtenant : $z = \dfrac{Z-i}{i+Z}$.

$$\boxed{\forall Z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\},\ Z \text{ a un unique antécédent par } h}$$

Ce qui démontre que h induit une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ dans $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$. La bijection réciproque a été trouvée lors du calcul que l'on vient d'effectuer où l'on a exprimé z en fonction de Z. On a :

$$\boxed{\begin{array}{cccc} h^{-1} & : & \mathbb{C} \setminus \{-i\} & \to & \mathbb{C} \setminus \{1\} \\ & & Z & \mapsto & \dfrac{Z-i}{i+Z} \end{array}}$$

6. Soit $z \in \mathbb{R}$, démontrons que $|g(z)|^2 = g(z)\overline{g(z)} = 1$ ainsi on aura bien $g(z) \in U$.

$$\begin{aligned} g(z)\overline{g(z)} &= \frac{z-i}{z+i} \times \frac{\overline{z}+i}{\overline{z}-i} \\ &= \frac{z-i}{z+i} \times \frac{z+i}{z-i} \quad \text{car } z \text{ est réel donc } z = \overline{z} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{R},\ g(z) \in U}$$

7. Soit $z \in P$, c'est-à-dire que $\mathcal{I}m(z) > 0$, on doit démontrer que $|g(z)| < 1$. Pour cela, on effectue le calcul suivant :

$$\begin{aligned} g(z)\overline{g(z)} &= \frac{z-i}{z+i} \times \frac{\overline{z}+i}{\overline{z}-i} \\ &= \frac{z\overline{z}+1+i(z-\overline{z})}{z\overline{z}+1+i(\overline{z}-z)} \\ &= \frac{z\overline{z}+1+i(2i\mathcal{I}m(z))}{z\overline{z}+1-i(2i\mathcal{I}m(z))} \quad \text{car } z - \overline{z} = 2i\mathcal{I}m(z) \\ &= \frac{z\overline{z}+1-2\mathcal{I}m(z)}{z\overline{z}+1+2\mathcal{I}m(z)} < 1 \end{aligned}$$

Ce quotient est en effet inférieur à 1 puisque $z\overline{z}+1-2\mathcal{I}m(z) < z\overline{z}+1+2\mathcal{I}m(z)$ car $\mathcal{I}m(z) > 0$. Finalement, on a démontré que $g(z)\overline{g(z)} = |g(z)|^2 < 1$ donc $|g(z)| < 1$.

$$\boxed{\forall z \in P,\ g(z) \in D}$$

8. Soit $z \in \mathbb{C}\setminus\{-4i\}$. Remarquons que $f(z)=0$ si et seulement si $z=2i$. Ainsi pour $z=2i$, $f(z)$ est réel. Excluons ce cas par la suite puisque l'on va se servir d'un argument de $f(z)$:

$$\begin{aligned}
f(z) \in \mathbb{R}^* &\Leftrightarrow \arg(f(z)) = 0\ [\pi] \\
\text{"} &\Leftrightarrow \arg\Big(-i\frac{z-2i}{z+4i}\Big) = 0\ [\pi] \\
\text{"} &\Leftrightarrow \arg(-i) + \arg\Big(\frac{z-2i}{z+4i}\Big) = 0\ [\pi] \\
\text{"} &\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + \arg\Big(\frac{z-2i}{z+4i}\Big) = 0\ [\pi] \\
\text{"} &\Leftrightarrow \arg\Big(\frac{z-2i}{z+4i}\Big) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]
\end{aligned}$$

Notons A le point d'affixe $2i$, B le point d'affixe $-4i$ et M le point d'affixe z. D'après la relation vue en cours entre argument et angle, on a :

$$f(z) \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg\Big(\frac{z-2i}{z+4i}\Big) = \frac{\pi}{2}\ [\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) = \frac{\pi}{2}\ [\pi] \text{ avec } M \neq A \text{ et } M \neq B$$

La condition $M \neq A$ vient du fait que l'on a exclu le cas $z = 2i$ au début du calcul et la condition $M \neq B$ vient du fait que la fonction f n'est pas définie en $z = -4i$.

C'est équivalent à dire que M décrit le cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et de B. On doit pour finir l'étude ajouter le point A à l'ensemble recherché puisque si $z = 2i$ alors $f(z) = 0$ qui est bien un nombre réel.

$$\boxed{\text{Le lieu géométrique recherché est le cercle de centre } -i \text{ et de rayon 3 privé de } B}$$

9. On procède de même qu'à la question précédente, en prenant $z \in \mathbb{C}\setminus\{-4i, 2i\}$:

$$\begin{aligned}
\arg(f(z)) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi] &\Leftrightarrow \arg\Big(-i\frac{z-2i}{z+4i}\Big) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \\
\text{"} &\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + \arg\Big(\frac{z-2i}{z+4i}\Big) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \\
\text{"} &\Leftrightarrow \arg\Big(\frac{z-2i}{z+4i}\Big) = \pi\ [2\pi]
\end{aligned}$$

On reprend les mêmes notations qu'à la question précédente en posant M d'affixe z, A d'affixe $2i$ et B d'affixe $-4i$. La dernière égalité obtenue équivaut à dire que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ ont la même direction et un sens opposé. C'est équivalent à $M \in]AB[$, en se souvenant que l'on a exclu au départ les cas $M = A$ et $M = B$.

$$\boxed{\text{Le lieu recherché est le segment ouvert }]AB[}$$

Exercice 3

La principale difficulté de ce problème est le niveau d'abstraction. En effet, l'étude menée concerne certains sous-ensembles de l'ensemble des sous-ensembles de E. Ces sous-ensembles du type (Λ) sont plus communément appelés des filtres. Les filtres sont un outil abstrait pour généraliser la notion de limite, mais l'objet du problème est plutôt d'étudier les propriétés élémentaires de ces objets que leur utilisation poussée.

1. (a) On a immédiatement :

$$\boxed{\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}}$$

(b) i. $\mathcal{F}_1$ n'est pas du type (Λ) car la condition (Λ_1) n'est pas vérifiée.

ii. $\mathcal{F}_2$ n'est pas du type (Λ) car $\emptyset \in \mathcal{F}_2$ ce qui contredit la condition (Λ_4).

iii. $\mathcal{F}_3$ n'est pas du type (Λ) car $\{a\} \cap \{b,c\} = \emptyset$ et $\emptyset \notin \mathcal{F}_3$. La condition (Λ_2) n'est ainsi pas vérifiée.

iv. $\mathcal{F}_4$ n'est pas du type (Λ) car $\{a\} \in \mathcal{F}_4$ et $\{a\} \subset \{a,b,c\}$, pourtant $\{a,b,c\} \notin \mathcal{F}_4$. La condition (Λ_3) n'est ainsi pas vérifiée.

v. $\mathcal{F}_5$ est du type (Λ). Les conditions (Λ_1) et (Λ_4) sont clairement vérifiées. L'intersection de deux éléments de $\mathcal{F}_5$ est encore un élément de $\mathcal{F}_5$, ce qui fait que la condition (Λ_2) est satisfaite. Enfin, si l'on prend un élément de $\mathcal{F}_5$, on vérifie sans difficulté que les parties de E contenant cet élément sont encore dans $\mathcal{F}_5$, ce qui constitue la condition (Λ_3).

(c) Soit $\mathcal{F}$ un sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$ du type (Λ), déjà $\emptyset \notin \mathcal{F}$. Il y a différents cas à distinguer :

- Si $\{a\} \in \mathcal{F}$, alors la condition (Λ_3) impose que $\{a,b\}$, $\{a,c\}$ et $\{a,b,c\}$ soient également des éléments de $\mathcal{F}$. Par contre $\{b\}$, $\{c\}$ et $\{b,c\}$ ne peuvent être des éléments de $\mathcal{F}$ puisque leurs intersections respectives avec $\{a\}$ est réduite à l'ensemble vide ce qui contredirait la condition (Λ_2). On obtient dans ce cas :

$$\mathcal{F} = \{\{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}$$

- Si $\{b\} \in \mathcal{F}$, le raisonnement est identique au précédent et on obtient :

$$\mathcal{F} = \{\{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$$

- De même, si $\{c\} \in \mathcal{F}$, on a :

$$\mathcal{F} = \{\{c\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$$

On suppose dans les cas à venir que $\{a\}$, $\{b\}$ et $\{c\}$ ne sont pas des éléments de $\mathcal{F}$ pour ne pas retomber dans l'un des cas précédents.

- Si $\{a,b\} \in \mathcal{F}$, alors la condition (Λ_3) impose que $\{a,b,c\}$ soit également un élément de $\mathcal{F}$. Par contre, $\{a,c\}$ et $\{b,c\}$ ne peuvent être des éléments de $\mathcal{F}$ puisque leurs intersections respectives avec $\{a,b\}$ seraient $\{a\}$ ou $\{b\}$ ce que l'on a exclu. Finalement :

$$\mathcal{F} = \{\{a,b\}, \{a,b,c\}\}$$

- De même, si $\{a,c\} \in \mathcal{F}$, on a :

$$\mathcal{F} = \{\{a,c\}, \{a,b,c\}\}$$

- De même, si $\{b,c\} \in \mathcal{F}$, on a :

$$\mathcal{F} = \{\{b,c\}, \{a,b,c\}\}$$

► Enfin si les ensembles $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a,b\}$, $\{a,c\}$ et $\{b,c\}$ ne sont pas des éléments de $\mathcal{F}$, comme $\mathcal{F}$ est non vide d'après la condition (Λ_1), c'est que :

$$\mathcal{F} = \{\{a,b,c\}\}$$

Pour résumer, les sous-ensembles de $\mathcal{P}(E)$ du type (Λ) sont au nombre de 7, il y a :

$$\boxed{\begin{array}{c} \{\{a\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,b,c\}\} \\ \{\{b\},\{a,b\},\{b,c\},\{a,b,c\}\} \\ \{\{c\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\} \\ \{\{a,b\},\{a,b,c\}\} \\ \{\{a,c\},\{a,b,c\}\} \\ \{\{b,c\},\{a,b,c\}\} \\ \{\{a,b,c\}\} \end{array}}$$

2. (a) On a $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$, ceci contredit la condition (Λ_4), ainsi :

$$\boxed{\mathcal{P}(E) \text{ n'est pas du type } (\Lambda)}$$

(b) Si $\mathcal{F}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$ vérifiant (Λ_3) mais pas (Λ_4), alors $\emptyset \in \mathcal{F}$. Pour tout $Y \in \mathcal{P}(E)$, on a $\emptyset \subset Y$, donc d'après (Λ_3), on a $Y \in \mathcal{F}$. On obtient dans ce cas :

$$\boxed{\mathcal{F} = \mathcal{P}(E)}$$

(c) Supposons que E possède deux éléments distincts x et y. On a $\{x\}$ et $\{y\}$ qui appartiennent à $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$, ainsi d'après (Λ_2), on a $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset \in (\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\})$ ce qui est absurde. Dans ce cas $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ n'est pas un sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$ du type (Λ). Si E possède un unique élément x, il est clair que $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\} = \{\{x\}\}$ est du type (Λ).
Finalement :

$$\boxed{\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\} \text{ est du type } (\Lambda) \text{ si et seulement si } E \text{ est un singleton}}$$

(d) D'après (Λ_1), on a $\mathcal{F}$ qui est non vide, il existe ainsi $A \in \mathcal{F}$. On a $A \subset E$ donc d'après (Λ_3), il vient $E \in \mathcal{F}$. Quelque soit $\mathcal{F}$ du type (Λ), on a :

$$\boxed{E \in \mathcal{F}}$$

3. (a) D'après la définition $\mathcal{F}_{\{a\}}$ a pour éléments les sous-ensembles de E contenant $\{a\}$, c'est-à-dire que :

$$\boxed{\mathcal{F}_{\{a\}} = \{\{a\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,b,c\}\}}$$

Avec le même type de raisonnement, on obtient :

$$\boxed{\mathcal{F}_{\{a,b\}} = \{\{a,b\},\{a,b,c\}\}}$$

et

$$\boxed{\mathcal{F}_{\{a,b,c\}} = \{\{a,b,c\}\}}$$

On retrouve dans chaque cas des sous-ensembles de $\mathcal{P}(E)$ du type (Λ) trouvés à la question 1.(c).

(b) Vérifions les 4 propriétés requises :

▶ On a $\mathcal{F}_A \neq \emptyset$ puisque $A \in \mathcal{F}_A$ étant donné que $A \subset A$. Ce qui montre que (Λ_1) est vérifiée.

▶ Prenons deux éléments de $\mathcal{F}_A$, que nous notons X et Y. On a par définition de $\mathcal{F}_A$: $A \subset X$ et $A \subset Y$, d'où $A \subset X \cap Y$. Ceci démontre que $X \cap Y \in \mathcal{F}_A$, la propriété (Λ_2) est ainsi satisfaite.

▶ Prenons $X \in \mathcal{F}_A$, c'est-à-dire $A \subset X$. Pour tout $Y \in \mathcal{P}(E)$ tel que $X \subset Y$, on a alors : $A \subset X \subset Y$. Ce qui montre que $Y \in \mathcal{F}_A$, la propriété (Λ_3) est vraie.

▶ Enfin, il est clair que $\emptyset \notin \mathcal{F}_A$ puisque A n'est pas inclus dans l'ensemble vide, A étant supposé non vide. Finalement, on a :

$$\boxed{\mathcal{F}_A \text{ est du type } (\Lambda)}$$

(c) Remarquons déjà que l'application Γ est correctement définie puisque, d'après la question précédente, $\mathcal{F}_A$ est du type (Λ) donc est un élément de $\mathcal{F}(E)$.

Pour montrer l'injectivité, prenons A et B deux parties non vides de E et supposons que $\Gamma(A) = \Gamma(B)$, c'est-à-dire que $\mathcal{F}_A = \mathcal{F}_B$ et tâchons de montrer que $A = B$. On a $A \in \mathcal{F}_A$, donc $A \in \mathcal{F}_B$, c'est-à-dire que $B \subset A$. De même, on a $B \in \mathcal{F}_B$, donc $B \in \mathcal{F}_A$, c'est-à-dire que $A \subset B$. Finalement, d'après le principe de double inclusion, on vient de démontrer que $A = B$, d'où :

$$\boxed{\Gamma \text{ est injective}}$$

4. (a) Convenons de noter $\overline{A} = C_E A$ où A est une partie de E. Vérifions les 4 propriétés requises :

▶ Remarquons que E est le complémentaire de l'ensemble vide qui est bien une partie finie de E. Ceci montre que $E \in \mathcal{I}(E)$, ainsi $\mathcal{I}(E)$ est non vide et (Λ_1) est vérifiée.

▶ Prenons deux éléments de $\mathcal{I}(E)$, que nous notons X et Y, par définition $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ sont des ensembles finis. On a $\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$, or $\overline{X} \cup \overline{Y}$ est fini comme union d'ensembles finis. On vient de montrer que le complémentaire dans E de $X \cap Y$ est fini, d'où $X \cap Y \in \mathcal{I}(E)$ et par suite (Λ_2) est satisfaite.

▶ Soit $X \in \mathcal{I}(E)$ et $Y \in \mathcal{P}(E)$ avec $X \subset Y$, tâchons de montrer que $Y \in \mathcal{I}(E)$ c'est-à-dire que son complémentaire dans E est fini. On a $X \subset Y \Leftrightarrow \overline{Y} \subset \overline{X}$, ainsi $\overline{Y}$ est inclus dans un ensemble fini donc est lui-même fini. Ceci montre que (Λ_3) est vérifiée.

▶ Enfin, on a bien $\emptyset \notin \mathcal{I}(E)$ puisque son complémentaire, E, est un ensemble infini par hypothèse.

$$\boxed{\mathcal{I}(E) \text{ est du type } (\Lambda)}$$

(b) La question précédente montre que $\mathcal{I}(E) \in \mathcal{F}(E)$, montrons justement que $\mathcal{I}(E)$ n'a pas d'antécédent par Γ ce qui mettra en défaut la surjectivité de Γ. Par l'absurde, supposons qu'il existe A une partie non vide de E telle que $\mathcal{I}(E) = \mathcal{F}_A$. Comme $A \in \mathcal{F}_A$, on doit avoir $\overline{A}$ fini. D'autre part, A étant non vide, il existe $a \in A$, la partie $A \setminus \{a\}$ a pour complémentaire dans E l'ensemble $\overline{A} \cup \{a\}$ qui est encore un ensemble fini. Ceci montre que $A \setminus \{a\} \in \mathcal{F}_A$ mais pourtant l'inclusion $A \subset (A \setminus \{a\})$ est clairement fausse, d'où l'absurdité.

$$\boxed{\text{Si } E \text{ est infini}, \Gamma \text{ n'est pas surjective}}$$

5. (a) On va prendre un élément de $\mathcal{F}$ qui a un nombre d'éléments minimal, cet élément va exister puisque tous les éléments de $\mathcal{F}$ n'ont pas une infinité d'éléments d'après l'hypothèse. Pour formaliser cela mathématiquement notons B une partie de $\mathcal{F}$ ayant un nombre fini d'éléments et considérons l'ensemble :

$$R = \{\mathrm{Card}(C),\ C \in \mathcal{F} \text{ et } C \text{ fini}\}$$

L'ensemble R est composé d'entiers naturels, il est non vide puisque $\mathrm{Card}(B) \in R$. Une partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un minimum. Il existe ainsi un élément de $\mathcal{F}$ de cardinal minimal que l'on note A.

(b) Afin d'avoir $\mathcal{F} = \mathcal{F}_A$, il s'agit de montrer que $\forall X \in \mathcal{F}$, on a $A \subset X$. On a d'après la propriété (Λ_2), $D = A \cap X \in \mathcal{F}$, ceci implique que $\text{Card}(D) \leq \text{Card}(A)$. Le nombre d'éléments de A étant minimal ceci impose $\text{Card}(D) = \text{Card}(A)$. Or par construction $D \subset A$, ajouté au fait que D et A ont le même nombre d'éléments ceci montre que $A \subset X$ qui était le résultat recherché.

Finalement :

$$\boxed{\mathcal{F} = \mathcal{F}_A}$$

(c) Si E est un ensemble fini non vide, montrons que Γ est surjective, pour cela prenons $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(E)$ et tâchons de lui trouver un antécédent par Γ. L'ensemble E étant fini, $\mathcal{F}$ possède bien un élément ayant un cardinal fini non nul puisque $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Ainsi la question précédente s'applique et $\mathcal{F} = \mathcal{F}_A = \Gamma(A)$ avec A une partie non vide de E appartenant à $\mathcal{F}$, de cardinal minimal.

En combinant cela avec l'injectivité de Γ démontrée à la question 3.(c), on a :

$$\boxed{\text{Si } E \text{ est fini non vide alors } \Gamma \text{ est bijective}}$$

(d) Lorsque deux ensembles finis sont en bijection alors ils ont le même nombre d'éléments. Le nombre de sous-ensembles de $\mathcal{P}(E)$ de type (Λ), c'est-à-dire le cardinal de $\mathcal{F}(E)$, est égal au cardinal de $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$. Or si E est un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$, alors le cardinal de $\mathcal{P}(E)$ est égal à 2^n, ainsi le cardinal de $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ est $2^n - 1$, ce qui est d'ailleurs vérifié dans le cas particulier de la question 1.

On a démontré que si E est un ensemble fini non vide de cardinal n alors :

$$\boxed{\text{Card}(\mathcal{F}(E)) = 2^n - 1}$$