

Problème : À la découverte de l'arctangente

A-Simplification de $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y)$

Soient x et y deux réels, le but de cette partie est de simplifier l'expression $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y)$ et d'étudier quelques applications de ce résultat.

1. Dans cette question, on étudie le cas particulier où $y = \frac{1}{x}$ avec x un réel non nul. On considère la fonction :

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

2. Dans cette question, on considère $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $xy \neq 1$.

(a) i. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(\text{Arctan}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

ii. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(\text{Arctan}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

(b) Montrer que : $\cos(\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y)) = \frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}$.

(c) En déduire que : $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y) \in \left] -\pi, -\frac{\pi}{2} \right[\cup \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\cup \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$.

(d) Donner une simplification de $\tan(\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y))$.

(e) On suppose $xy < 1$, à l'aide de la question b) montrer que $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y) \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$. En déduire que :

$$\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y) = \text{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

(f) On suppose $xy > 1$ et $x > 0$, montrer que $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y) \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$. En déduire que :

$$\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y) = \text{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) + \pi$$

(g) Traiter pour finir le cas où $xy > 1$ et $x < 0$, en démontrant que :

$$\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y) = \text{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) - \pi$$

3. Résumer tous les cas précédents en donnant une simplification de $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y)$ selon les valeurs de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

4. (a) Etablir que $2\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{5}{12}\right)$.

(b) En déduire que $4\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{120}{119}\right)$.

(c) Démontrer la formule de Machin : $\frac{\pi}{4} = 4\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right)$.

B-Approximation polynomiale de la fonction Arctan

1. Soit q un nombre réel et n un entier naturel. Simplifier : $\sum_{k=0}^n (-1)^k q^k$.
2. Pour tout entier naturel n et tout réel $x \geq 0$, on pose :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

Calculer $S'_n(x)$ et en donner une expression simplifiée sans le signe Σ .

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \geq 0$, on pose $R_n(x) = \text{Arctan}(x) - S_n(x)$.
 - (a) Calculer $R_n(0)$.
 - (b) Etablir les variations de la fonction R_n sur $\mathbb{R}_+$, on pourra distinguer les cas n pair et n impair.
 - (c) Pour $x \geq 0$, comparer les nombres $S_n(x)$, $\text{Arctan}(x)$ et $S_{n+1}(x)$ selon la parité de n .
 - (d) En déduire que pour tout $x \geq 0$ et pour tout entier naturel n , on a :

$$|\text{Arctan}(x) - S_n(x)| \leq \frac{x^{2n+3}}{2n+3}$$

4. (a) Démontrer que $\pi = \lim_{n \rightarrow +\infty} 4 \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$.
 - (b) Expliquer comment obtenir une valeur approchée de π à 10^{-6} près.