1-Montrer que $f : x \mapsto \sin(\ln(x))$ n'a pas de limite en $+\infty$.

2-Comment choisir $a \in \mathbb{R}$ afin la fonction f suivante soit continue sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcl} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

3-Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1$ si x est un nombre premier et $f(x) = 0$ sinon. La fonction f admet-elle une limite en $+\infty$?

4-Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ avec $f + g$ continue en 0, peut-on en déduire que f et g sont continues en 0 ?

5-Avec la définition, démontrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x^2 + x - 2) = +\infty$.

6-Soit f définie sur $\mathbb{R}$ et continue en 0. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(3x) = f(x)$, démontrer que f est constante.

7-Trouver une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue en 0 et discontinue en tout point de $\mathbb{R}^*$.

1-Montrer que $f : x \mapsto \sin(\ln(x))$ n'a pas de limite en $+\infty$.

Réponse : On considère la suite définie par $u_n = e^{\frac{\pi}{2}+n\pi}$. Cette suite tend vers $+\infty$ mais :

$$f(u_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = (-1)^n$$

donc $(f(u_n))$ n'a pas de limite en $+\infty$. D'après la caractérisation séquentielle de la limite, on en déduit que f n'a pas de limite en $+\infty$.

2-Comment choisir $a \in \mathbb{R}$ afin la fonction f suivante soit continue sur $\mathbb{R}$:

$$f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

Réponse : • D'une part, la fonction f est clairement continue en tout point de $\mathbb{R}^*$ car la fonction $x \mapsto \dfrac{e^x - 1}{x}$ l'est.

• Il reste à étudier la continuité en 0, on sait que : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.
Ainsi on aura $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = a$ si et seulement si $a = 1$.

3-Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1$ si x est un nombre premier et $f(x) = 0$ sinon. La fonction f admet-elle une limite en $+\infty$?

Réponse : • Comme l'ensemble des nombres premiers est infini, on peut considérer (p_n) la suite des nombres premiers. On a $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} f(p_n) = 1$ par définition de la fonction f.

• D'autre part, si l'on considère la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2n + 4$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = 0$ car aucun nombre de cette suite n'est premier.

D'après la caractérisation séquentielle de la limite, on en déduit que f n'a pas de limite en $+\infty$.

4-Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ avec $f+g$ continue en 0, peut-on en déduire que f et g sont continues en 0 ?

Réponse : C'est faux : $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ et $x \mapsto -\lfloor x \rfloor$ ne sont pas continues en 0 pourtant la somme est la fonction nulle qui est continue en 0.

5-Avec la définition, démontrer que : $\lim_{x \to +\infty} \ln(x^2 + x - 2) = +\infty$.

Réponse : La question a un sens car la fonction est définie au voisinage de $+\infty$, par exemple sur $[3, +\infty[$. Soit $B \in \mathbb{R}$, on cherche $A \in \mathbb{R}$ tel que :

$$x \geq A \Rightarrow f(x) \geq B$$

On peut choisir $A = e^B + 2$ ainsi :

$$x \geq e^B + 2 \Rightarrow \ln(x - 2) \geq B$$

Ce qui implique que : $\ln(x^2 + x - 2) \geq B$. On a démontré que :

$$\forall B \in \mathbb{R},\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in [3, +\infty[,\ x \geq A \Rightarrow f(x) \geq B$$

C'est la définition de $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

6-Soit f définie sur $\mathbb{R}$ et continue en 0. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(3x) = f(x)$, démontrer que f est constante.

Réponse : Soit $x \in \mathbb{R}$, à partir de l'hypothèse de l'énoncé et par une récurrence immédiate, on démontre que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f\left(\frac{x}{3^n}\right) = f(x)$$

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{x}{3^n} = 0$ et f est continue en 0, d'après la caractérisation séquentielle de la continuité, on en déduit que :

$$f(0) = \lim_{n \to +\infty} f\left(\frac{x}{3^n}\right) = f(x)$$

La fonction f est constante sur $\mathbb{R}$.

7-Trouver une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue en 0 et discontinue en tout point de $\mathbb{R}^*$.

Réponse : On pose :

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

La fonction f est continue en 0 car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq |x|$ donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$.

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Il est possible de trouver une suite de rationnels, (r_n), qui tend vers a ainsi qu'une suite d'irrationnels, (i_n), qui tend vers a. On a :

$$f(r_n) = r_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$$

$$f(i_n) = 0 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Comme $a \neq 0$, on en déduit, d'après la C.S.L, que f n'a pas de limite en a et donc qu'elle n'est pas continue en a.