1-Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$.

2-Que vaut $\mathrm{Arctan}\left(\tan\left(\dfrac{22\pi}{7}\right)\right)$?

3-Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{\mathrm{Arccos}(x)}{x}$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{Arctan}(x)}{x}$.

4-Pour $x \in \left[3\pi, \dfrac{7\pi}{2}\right]$, simplifier $\mathrm{Arcsin}(\sin(x))$.

5-Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(\mathrm{Arctan}(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

6-★ Soit $f : x \mapsto -3\sin(x)^2 + 5$ définie sur $\left[\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right]$. Montrer que f est une bijection de $\left[\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right]$ vers un intervalle à préciser. Expliciter f^{-1}.

1-Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$.

Réponse : On a :

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \Big[\text{Arctan}(t)\Big]_0^1 = \text{Arctan}(1) - \text{Arctan}(0) = \frac{\pi}{4}$$

2-Que vaut $\operatorname{Arctan}\Big(\tan\left(\dfrac{22\pi}{7}\right)\Big)$?

Réponse : On sait que :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \ \operatorname{Arctan}(\tan(x)) = x$$

On va se ramener à cet intervalle, par π-périodicité de la fonction tangente, on a : $\operatorname{Arctan}\Big(\tan\left(\dfrac{22\pi}{7}\right)\Big) =$

$$\operatorname{Arctan}\Big(\tan\left(\frac{22\pi}{7} - 3\pi\right)\Big) = \operatorname{Arctan}\Big(\tan\left(\frac{\pi}{7}\right)\Big) = \frac{\pi}{7}$$

3-Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\text{Arccos}(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{Arctan}(x)}{x}$.

Réponse : Ce n'est pas une forme indéterminée, on a :

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\text{Arccos}(x)}{x} = -\infty$$

Pour $x \neq 0$, on a :

$$\frac{\text{Arctan}(x)}{x} = \frac{\text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(0)}{x - 0} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \text{Arctan}'(0) = 1$$

ceci en reconnaissant le taux d'accroissement de la fonction Arctan en 0.

4-Pour $x \in \left[3\pi, \dfrac{7\pi}{2}\right]$, simplifier $\text{Arcsin}(\sin(x))$.

Réponse : On remarque que pour $x \in \left[3\pi, \dfrac{7\pi}{2}\right]$, on a $x - 3\pi \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, ainsi :

$$\text{Arcsin}(\sin(x)) = \text{Arcsin}(-\sin(x-3\pi)) = -\text{Arcsin}(\sin(x-3\pi)) = -(x-3\pi)$$

5-Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(\text{Arctan}(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Réponse : On va utiliser la relation suivante valable pour tout $a \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$: $\cos^2(a) = \dfrac{1}{1+\tan^2(a)}$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos^2(\text{Arctan}(x)) = \frac{1}{1+\tan^2(\text{Arctan}(x))} = \frac{1}{1+x^2} \quad (\bigstar)$$

De plus pour tout x réel, on a : $\text{Arctan}(x) \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, ainsi $\cos(\text{Arctan}(x)) > 0$.

Ainsi en prenant la racine carrée de la relation $(\bigstar)$, on obtient :

$$\cos(\text{Arctan}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

6-Soit $f : x \mapsto -3\sin(x)^2 + 5$ définie sur $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$. Montrer que f est une bijection de $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ vers un intervalle à préciser. Expliciter f^{-1}.

Réponse : Notons $I = \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$. La fonction f est dérivable sur I et :

$$\forall x \in I,\ f'(x) = -6\sin(x)\cos(x) \leq 0$$

en effet, le signe s'obtient en remarquant que cos et sin sont négatives sur I. De plus, cette dérivée ne s'annule qu'en deux points isolés : π et $\frac{3\pi}{2}$. On en déduit que f est strictement décroissante sur I.

On a $f(\pi) = 5$ et $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2$. La fonction f étant continue sur I, tous les éléments sont réunis pour affirmer que f réalise une bijection de $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ dans $[2, 5]$.

Soit $x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ et $y \in [2,5]$, on a :

$$\begin{aligned}
y = f(x) \quad &\Leftrightarrow \quad y = -3\sin(x)^2 + 5 \\
&\Leftrightarrow \quad \sin(x)^2 = \frac{5-y}{3} \\
&\Leftrightarrow \quad \sin(x) = -\sqrt{\frac{5-y}{3}} \qquad \text{car sin négative sur } I \\
&\Leftrightarrow \quad \mathrm{Arcsin}(\sin(x)) = \mathrm{Arcsin}\Big(-\sqrt{\frac{5-y}{3}}\Big) \\
&\Leftrightarrow \quad \mathrm{Arcsin}(-\sin(x-\pi)) = \mathrm{Arcsin}\Big(-\sqrt{\frac{5-y}{3}}\Big) \\
&\Leftrightarrow \quad -\mathrm{Arcsin}(\sin(x-\pi)) = \mathrm{Arcsin}\Big(-\sqrt{\frac{5-y}{3}}\Big) \\
&\Leftrightarrow \quad x - \pi = -\mathrm{Arcsin}\Big(-\sqrt{\frac{5-y}{3}}\Big) \\
&\Leftrightarrow \quad x = \pi - \mathrm{Arcsin}\Big(-\sqrt{\frac{5-y}{3}}\Big)
\end{aligned}$$

On a pu simplifier car $x - \pi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

On a $f^{-1} : y \mapsto \pi - \mathrm{Arcsin}\left(-\sqrt{\dfrac{5-y}{3}}\right)$ définie sur $[2,5]$.