D1 ★★★ Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant $f \circ f = f$.

On procède par analyse-synthèse en se donnant une fonction f vérifiant les conditions de l'énoncé. La fonction f étant dérivable sur $\mathbb{R}$ en dérivant la relation $f \circ f = f$, il vient : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) \times f'(f(x)) = f'(x)$ (★). On évalue cette relation en $f(x)$ ce qui donne $f'(f(x)) \times f'(f(x)) = f'(f(x))$. Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(f(x)) = 1 \text{ ou } f'(f(x)) = 0$$

Cependant comme $f' \circ f$ est continue les valeurs 0 et 1 ne peuvent être toutes les deux prises sinon la valeur intermédiaire $\dfrac{1}{2}$ serait aussi une valeur prise par $f' \circ f$. Il y a ainsi deux cas à examiner :

► Si pour tout x réel : $f'(f(x)) = 0$ alors avec la relation (★), il vient : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 0$ donc f est constante.

► Si pour tout x réel : $f'(f(x)) = 1$ (★★), on pose $I = f(\mathbb{R})$ qui est un intervalle comme image d'un intervalle par une fonction continue. La relation $f' \circ f = 1$ implique que :

$$\forall x \in I,\ f'(x) = 1 \Leftrightarrow \forall x \in I,\ f(x) = x + C \text{ où } C \text{ est une constante réelle}$$

La relation $f \circ f = f$ implique par un calcul immédiat que $C = 0$. Ainsi $\forall x \in I,\ f(x) = x$.

Nous allons à présent démontrer que $I = \mathbb{R}$, supposons par l'absurde que I est majoré et notons m sa borne supérieure. Comme nous l'avons vu au cours de plusieurs démonstrations, il est possible de trouver une suite (x_n) d'éléments de I telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = m$. On a alors $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x_n) = x_n$, en passant à la limite grâce à la continuité de f il vient $f(m) = m$ et $f'(m) = 1$ avec (★★). Ces deux conditions montrent que f prend des valeurs supérieures à m (puisque $f'(m) > 0$), ceci est absurde par définition de la borne supérieure.

En résumé I n'est pas majoré et l'on montre de même que I n'est pas minoré. Comme I est un intervalle cela implique que $I = \mathbb{R}$, ce qui nous donne que $\forall x \in I = \mathbb{R},\ f(x) = x$.

À la fin de l'analyse, on trouve que les seules fonctions pouvant vérifier les conditions de l'énoncé sont les fonctions constantes et la fonction identité.

Réciproquement, ces fonctions vérifient de façon évidente la relation $f \circ f = f$.

D2 ★★★ Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) + f'(x) = l \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.

Commençons par écrire la définition de la limite. Soit $\varepsilon > 0$:

$$\exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \geq A,\ |f(x) + f'(x) - l| \leq \varepsilon \quad (\bigstar)$$

Il va falloir trouver un lien entre $f + f'$ et f, nous avions déjà remarqué que l'on peut concrétiser cette idée en posant : $g : x \mapsto f(x)e^x$. La fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ car f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et en dérivant nous trouvons $g' : x \mapsto (f(x) + f'(x))e^x$.

Si l'on multiplie la relation (★) par e^x, il vient :

$$\forall x \geq A,\ |(f(x) + f'(x))e^x - le^x| \leq \varepsilon e^x \Leftrightarrow \forall x \geq A,\ |g'(x) - le^x| \leq \varepsilon e^x \quad (\bigstar\bigstar)$$

Pour simplifier les notations, on pose $h : x \mapsto g(x) - le^x$ qui est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h' : x \mapsto g'(x) - le^x$. On a ainsi la majoration (★★) qui se réécrit :

$$\forall x \geq A,\ |h'(x)| \leq \varepsilon e^x$$

Pour tout $x \geq A$:

$$|h(x) - h(A)| = \left| \int_A^x h'(t)dt \right| \leq \int_A^x |h'(t)|dt \leq \int_A^x \varepsilon e^t dt = \varepsilon(e^x - e^A) \leq \varepsilon e^x$$

Il reste à détailler l'inégalité obtenue en revenant à la fonction f :

$$\begin{aligned} |e^x f(x) - le^x - (e^A f(A) - le^A)| \leq \varepsilon e^x \quad &\Leftrightarrow \quad |f(x) - l - (e^A f(A) - le^A)e^{-x}| \leq \varepsilon \\ &\Rightarrow \quad |f(x) - l| \leq \varepsilon + e^A |f(A) - l| e^{-x} \end{aligned}$$

Ceci en utilisant l'inégalité triangulaire bis pour obtenir la dernière majoration.
Or $\lim\limits_{x \to +\infty} e^A |f(A) - l| e^{-x} = 0$, ainsi :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = l}$$