

L'usage de la calculatrice est interdit. Les raisonnements présentés devront être soigneusement justifiés et détaillés, quelques points seront dédiés à la présentation, l'orthographe et la propreté de votre copie. En particulier, il vous est demandé de souligner les résultats obtenus. Il n'est pas nécessaire de répondre à l'ensemble des questions pour avoir une bonne note.

Exercice

Trouver toutes les fonctions de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ solutions de :

$$(E) : xy'(x) + y(x) = \text{Arctan}(x)$$

Problème 1 : Deux formules pour le calcul intégral

Le but de cet exercice est de démontrer puis d'utiliser deux formules mettant en jeu des intégrales. Les parties A et B sont indépendantes.

A-Propriété du Roi

1. **Énoncé.** Soit $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ continue. La propriété du Roi s'énonce ainsi :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(a + b - t)dt$$

- (a) Démontrer la propriété à l'aide d'un changement de variable.
- (b) Proposer une autre preuve de cette formule à l'aide de F une primitive sur $[a, b]$ de f .

2. **Applications de cette formule.**

- (a) Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Justifier que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos(x))dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin(x))dx$$

- (b) Soit $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1 + \tan(x)^{2025}} dx$. On pose $J = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan(x)^{2025}}{1 + \tan(x)^{2025}} dx$.

- i. Montrer que $I = J$.
- ii. Que vaut $I + J$?
- iii. En déduire la valeur de I .

- (c) Calculer $I = \int_{-3}^3 \frac{1 + x^2}{1 + 2^x} dx$.

- (d) Calculer $I = \int_0^{2\pi} \sin(\sin(x) - x) dx$.

B-Intégrale et bijection réciproque

1. **Énoncé.** Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ avec $f' > 0$ sur $[a, b]$. Nous allons démontrer que :

$$\int_a^b f(t)dt + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)dt = bf(b) - af(a)$$

- (a) Justifier que f^{-1} existe et donner son ensemble de définition.
- (b) Justifier que $\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)dt$ est bien définie.
- (c) En utilisant un changement de variable, montrer que : $\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)dt = \int_a^b uf'(u)du$.
- (d) En déduire la formule donnée dans l'énoncé.

Dans la suite de ce sujet, on admet que la formule reste vérifiée avec uniquement les hypothèses : f continue, bijective et strictement monotone sur $[a, b]$. C'est-à-dire que l'hypothèse sur la dérivabilité n'est pas nécessaire car on peut démontrer la formule d'une autre manière que l'on ne traitera pas dans ce sujet.

2. **Un exemple simple.** Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $f : t \mapsto t^\alpha$ et $(a, b) \in \mathbb{R}_+^*$ avec $a < b$.

- (a) Montrer que f vérifie les hypothèses de l'énoncé. Expliciter f^{-1} .
- (b) Vérifier la validité de la formule sur cet exemple.

3. **Une application plus compliquée.** Le but de cette question est de calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan(t)}dt$. On pose $f : t \mapsto \sqrt{\tan(t)}$.

- (a)
 - i. Montrer que f vérifie les hypothèses alternatives de la formule sur $[a, b] = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Expliciter f^{-1} avec son ensemble de définition.
 - ii. En déduire que $I = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \text{Arctan}(t^2)dt$.
 - iii. Justifier que $I = 2 \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^4}dt$.
- (b) Factoriser $t^4 + 1$ comme un produit de deux polynômes de degré 2 à coefficients réels.
- (c) Trouver $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{t^2}{1+t^4} = \frac{at+b}{t^2-\sqrt{2}t+1} + \frac{ct+d}{t^2+\sqrt{2}t+1}$$

- (d) Montrer que $\int_0^1 \frac{t}{t^2+\sqrt{2}t+1}dt = \int_0^{-1} \frac{t}{t^2-\sqrt{2}t+1}dt$.
- (e) En déduire une expression de I en fonction de $\int_{-1}^1 \frac{t}{t^2-\sqrt{2}t+1}dt$.
- (f) Terminer le calcul en trouvant l'expression de I .
- (g) Simplifier au maximum l'expression obtenue en l'écrivant sous la forme $\alpha \left(\ln(\beta) + \frac{\pi}{2} \right)$ où α et β sont des réels à préciser.

Problème 2 : Réciproque de la fonction th

Partie A : Étude Argth

1. Justifier que th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] -1, 1[$. On appelle argument tangente hyperbolique sa bijection réciproque et on la note Argth.
2. Étudier la fonction Argth, on précisera en particulier sa dérivée et on tracera le graphe.
3. Démontrer que : $\forall x \in] -1, 1[, \operatorname{Argth}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x+1}{1-x} \right)$.

Partie B : Une équation fonctionnelle

Le but de cette partie est de déterminer les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient les deux conditions suivantes :

$$(\star) \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = \frac{2f(x)}{1+f(x)^2} \\ f \text{ est dérivable en } 0 \end{cases}$$

On dira qu'une fonction f vérifie $(\star)$ si et seulement si elle vérifie les deux conditions ci-dessus.

1. (a) Déterminer les fonctions constantes qui vérifient $(\star)$.
 (b) Montrer que th vérifie $(\star)$.
 (c) Montrer que si f vérifie $(\star)$ alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ la fonction $f_\lambda : x \mapsto f(\lambda x)$ vérifie également $(\star)$.
 (d) Montrer que si f vérifie $(\star)$ alors $-f$ vérifie $(\star)$.

Dans toute la suite, on se donne f une fonction non constante qui vérifie $(\star)$.

2. Déterminer les valeurs possibles de $f(0)$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq f(x) \leq 1$.
4. Dans cette question, on suppose que $f(0) = 1$.
 - (a) Justifier que l'on peut fixer $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) \neq f(0)$. On définit la suite (u_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)$.
 - (b) Montrer que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.
 - (c) Pour $n \in \mathbb{N}$, établir une relation entre u_n et u_{n+1} . En déduire que la suite (u_n) garde un signe constant et aboutir à une contradiction avec la question précédente.
 - (d) Que peut-on dire si l'hypothèse $f(0) = 1$ est remplacée par l'hypothèse $f(0) = -1$? Conclusion ?

Dans la suite, on suppose que $f(0) = 0$.

5. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq -1$ et $f(x) \neq 1$.

On définit la fonction g par : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \operatorname{Argth}(f(x))$.

6. (a) Pourquoi g est-elle bien définie ?
 (b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, g(2x) = 2g(x)$.
 (c) Justifier que g est dérivable en 0.

On pose $a = g'(0)$.

7. Soit $x \in \mathbb{R}^*$, on définit la suite (v_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{g\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}}$.

- (a) Montrer que (v_n) converge et déterminer sa limite.
- (b) En déduire que g est linéaire.
- (c) Que vaut alors f ?

8. En conclusion, déterminer toutes les fonctions solutions du problème $(\star)$.