1-Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k+1}$.

2-Calculer $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2^{2k+1}}$ où $n \in \mathbb{N}$.

3-Soit $n \in \mathbb{N}$, proposer une formule qui met en jeu une somme double pour développer $(a+b+c)^n$ où $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$.

4-★ À l'aide de la formule du binôme de Newton, développer $(1+x)^{2n}$ de deux façons différentes avec $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. En identifiant les coefficients devant x^n, en déduire une simplification de :

$$S = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

1-Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k+1}$.

Réponse : On met tout d'abord 3 en facteur. On reconnait ensuite la formule du binôme de Newton, mais il faut remarquer que l'indice k commence à 1 et non à 0. On ajoute donc le terme pour $k = 0$ puis on l'enlève :

$$S = 3\Big(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k 1^{n-k} - 1\Big) = 3 \times ((3+1)^n - 1) = 3 \times 4^n - 3$$

2-Calculer $S=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{2^{2k+1}}$ où $n\in\mathbb{N}$.

Réponse : On transforme l'expression pour faire apparaitre la formule du binôme :

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{4^k}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k}\Big(\frac{-1}{4}\Big)^k\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Big(\frac{-1}{4}\Big)^k\\
&= \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{4}+1\Big)^n = \frac{1}{2}\Big(\frac{3}{4}\Big)^n
\end{aligned}
$$

3-Soit $n \in \mathbb{N}$, proposer une formule qui met en jeu une somme double pour développer $(a+b+c)^n$ où $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$.

Réponse : On a :

$$\begin{aligned}
(a+b+c)^n &= ((a+b)+c)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a+b)^k c^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^i b^{k-i} \right) c^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{k} \binom{k}{i} a^i b^{k-i} c^{n-k}
\end{aligned}$$

4-À l'aide de la formule du binôme de Newton, développer $(1+x)^{2n}$ de deux façons différentes avec $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. En identifiant les coefficients devant x^n, en déduire une simplification de :

$$S = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

Réponse : D'une part, d'après la formule du binôme :

$$(1+x)^{2n} = \sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} x^i$$

D'autre part, on a :

$$(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n = \Big(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\Big)\Big(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j\Big)$$

Cette dernière somme s'écrit :

$$(1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{j} x^{k+j}$$

Dans cette somme, nous obtenons un terme de degré n lorsque $j = n - k$, le coefficient de x^n est donc :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

en utilisant la formule de symétrie.

En identifiant avec le coefficient devant x^n dans le premier développement, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$