

1-Vrai ou faux : si la suite (u_n) converge vers l , la suite (u_{n^2}) converge vers l .

2-Donner les valeurs d'adhérence de la suite $\left(\cos\left(2n\frac{\pi}{3}\right) \right)$.

3-Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} z^n = l \in \mathbb{C}$. Montrer que $l = 0$ ou $l = 1$.

1-Vrai ou faux : si la suite (u_n) converge vers l , la suite (u_{n^2}) converge vers l .

Réponse : C'est vrai, si une suite (u_n) tend vers l alors toutes les suites extraites de (u_n) tendent vers l . L'application définie par $\varphi(n) = n^2$ est bien une extractrice donc (u_{n^2}) tend vers l .

2-Donner les valeurs d'adhérence de la suite $\left(\cos\left(2n\frac{\pi}{3}\right) \right)$.

Réponse : La suite possède deux valeurs d'adhérence 1 et $-\frac{1}{2}$ puisque $\cos(0) = 1$, $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ et la fonction cos est 2π -périodique. On a par exemple :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{3n} = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{3n+1} = -\frac{1}{2}$$

3-Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} z^n = l \in \mathbb{C}$. Montrer que $l = 0$ ou $l = 1$.

Réponse : En tant que suite extraite, on a aussi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z^{2n} = l$$

D'autre part,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z^{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (z^n)^2 = l^2$$

Par unicité de la limite $l = l^2$, on en déduit que $l = 0$ ou $l = 1$.