1. (a) • Déjà la fonction g est bien définie sur $\mathbb{R}_+$ car pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $x^2+1>0$ et la fonction ln est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

   • D'autre part, g est la somme et le produit de fonctions usuelles qui sont dérivables sur leurs ensembles de définition, ainsi g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

   • Pour le calcul de la dérivée, on utilise les règles de calculs usuelles, en particulier si u est une fonction dérivable à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, la dérivée de la fonction $\ln(u)$ est $\dfrac{u'}{u}$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$g'(x) = 4x - \left(2x\ln(x^2+1) + (x^2+1)\frac{2x}{x^2+1}\right) = 2x(1-\ln(x^2+1))$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g'(x) = 2x(1-\ln(x^2+1))}$$

   (b) Pour connaître le sens de variation de g, on étudie le signe de g'. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on a $2x \geq 0$, il reste à donner le signe du facteur $1-\ln(x^2+1)$.
   On a :

$$\begin{aligned} 1-\ln(x^2+1) \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 1 \geq \ln(x^2+1) \\ &\Leftrightarrow \quad e \geq x^2+1 \qquad \text{par stricte croissance de la fonction exponentielle} \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{e-1} \geq x \qquad \text{sachant que } x \geq 0 \end{aligned}$$

   On en déduit le tableau de variation suivant :

x	0		$\sqrt{e-1}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	$e-2$	$\searrow$	$-\infty$

   En effet $g(0)=0$ et $g(\sqrt{e-1}) = 2(e-1) - e\ln(e) = e-2$. La limite en $+\infty$ est une forme indéterminée que l'on pourrait lever en mettant x^2 en facteur, on trouve $-\infty$.

$$\boxed{g \text{ est strictement croissante sur } [0,\sqrt{e-1}] \text{ et strictement décroissante sur } [\sqrt{e-1},+\infty[}$$

   (c) On calcule tout d'abord l'image par g de la valeur proposée dans l'énoncé :

$$g(\sqrt{e^2-1}) = 2(e^2-1) - e^2\ln(e^2) = 2e^2 - 2 - 2e^2 = -2$$

   On va pouvoir appliquer le théorème de la bijection à la fonction g sur l'intervalle $[\sqrt{e-1},\sqrt{e^2-1}]$. La fonction g est continue et strictement décroissante sur cet intervalle, $g(\sqrt{e-1}) = e-2 > 0$ et $g(\sqrt{e^2-1}) = -2 < 0$. Ainsi il existe un unique réel $\alpha \in [\sqrt{e-1},\sqrt{e^2-1}]$ tel que $g(\alpha)=0$.

$$\boxed{\exists! \alpha \in [\sqrt{e-1},\sqrt{e^2-1}],\ g(\alpha)=0}$$

(d) Finalement, d'après les deux questions précédentes, on sait que :

$$\boxed{g \text{ est positive sur } [0,\alpha] \text{ et négative sur } [\alpha,+\infty[}$$

2. (a) Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\frac{\ln(1+y)}{y} = \frac{\ln(1+y)-\ln(1+0)}{y-0} = \frac{h(y)-h(0)}{y-0}$$

en posant $h : y \mapsto \ln(1+y)$ définie et dérivable sur $]-1,+\infty[$. On reconnaît alors le taux d'accroissement de la fonction h en 0. Quand y tend vers 0, ce quotient tend vers $h'(0)$ d'après la définition du nombre dérivé. On a $h' : y \mapsto \dfrac{1}{1+y}$ donc $h'(0) = 1$. Finalement :

$$\lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1$$

Vous avez peut-être déjà vu cette limite en terminale, elle est classique. Vous pouvez utiliser directement le résultat mais il est indispensable d'avoir compris comment l'obtenir.

Or $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$, on en déduit, par composition de limite, que :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = 1$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1}$$

Sachant que par définition $f(0) = 0$, on a pour $x > 0$:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x}$$

Ce quotient tend vers 1, on en déduit que f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.

$$\boxed{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0) = 1}$$

(b) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions usuelles qui sont dérivables et pour tout $x > 0$, on a d'après la formule de dérivation d'un quotient :

$$f'(x) = \frac{\frac{2x}{1+x^2} \times x - \ln(1+x^2) \times 1}{x^2} = \frac{2x^2 - (x^2+1)\ln(x^2+1)}{x^2(x^2+1)} = \frac{g(x)}{x^2(x^2+1)}$$

Le dénominateur est toujours positif et on connaît le signe du numérateur d'après la question 1.(d). On en déduit que :

$$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } [0,\alpha] \text{ et strictement décroissante } [\alpha,+\infty[}$$

(c) Pour $x \geq 1$, on a :

$$f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x} \leq \frac{\ln(x^2+x^2)}{x} = \frac{\ln(2x^2)}{x}$$

En effet lorsque $x \geq 1$, on a $x^2 \geq 1$ donc $\ln(1+x^2) \leq \ln(x^2+x^2)$ par croissance de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour $x \geq 1$, d'après les propriétés usuelles de la fonction ln, on a :

$$\frac{\ln(2x^2)}{x} = \frac{\ln(2) + 2\ln(x)}{x} = \frac{\ln(2)}{x} + 2\frac{\ln(x)}{x}$$

D'après les résultats usuels de croissances comparées, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$. Ainsi $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(2x^2)}{x} = 0$. Pour $x \geq 1$, on a l'encadrement :

$$0 \leq f(x) \leq \frac{\ln(2x^2)}{x}$$

En passant à la limite, d'après le théorème d'encadrement :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0}$$

(d) On sait que $f'(0) = 1$, ce qui nous permet de placer une tangente de pente 1 en 0. On a également une tangente horizontale en α car $f'(\alpha) = 0$. Enfin, on connait la limite en $+\infty$ d'après la question précédente. Tout ceci nous permet d'avoir le graphe suivant :